

М.И.ВЫСОЦКИЙ

**ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОСЛАБЫХ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ**

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОСЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Конспект лекций, читаемых на кафедре “Физика элементарных частиц” ФОПФ МФТИ, 5 год обучения, охватывает часть курса слабых взаимодействий. Вторая часть курса посвящена более традиционной проблематике – распадам лептонов и адронов.

LECTURES ON THE THEORY OF ELECTROWEAK INTERACTIONS

The lectures for the 5-year students of FOPF MPhTI cover a part of the course of Weak Interactions. The second part of the course deals with the decays of leptons and hadrons

С о д е р ж а н и е

Лекция 1 Эффект Голдстоуна

Лекция 2 Эффект Хиггса

Лекция 3 Бозонный сектор Стандартной Модели

Лекция 4 Фермионы в Стандартной Модели

Лекция 5 Свойства W - и Z - бозонов

Лекция 6 Свойства бозона Хиггса

Лекция 7 Взаимодействия и массы нейтрино

Лекция 8 Осцилляции нейтрино

Лекция 9 Радиационные поправки в электрослабой теории

Лекция 10 Фит Стандартной Модели и масса бозона Хиггса

Лекция 11 Теории Великого Объединения

Лекция 12 Суперсимметрия: формализм

Лекция 13 Суперсимметричное обобщение Стандартной Модели

Лекция 14 Концентрация реликтовых нейтрино во Вселенной

Введение

Созданная Энрико Ферми в 1934 году теория долго служила основой для изучения слабых взаимодействий. Было установлено много важнейших свойств слабого взаимодействия: его универсальность, нарушение пространственной (P), зарядовой (C) и комбинированной (CP) четностей, многое другое. В то же время было обнаружено, что теория Ферми неперенормируема, и интенсивно велись поиски заменяющей ее на малых расстояниях теории. Они увенчались построением перенормируемой калибровочной теории, объединившей слабые и электромагнитные взаимодействия. Переносчиком слабых взаимодействий являются тяжелые векторные W - и Z -бозоны, открытые экспериментально в 1984 году, через пятьдесят лет после работы Ферми. Электрослабая теория является частью Стандартной $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ Модели, объясняющей все известные свойства элементарных частиц.

Хиггсовский механизм генерации масс кварков, лептонов и промежуточных бозонов обеспечивает перенормируемость электрослабых взаимодействий, одновременно предсказывая существование скалярной частицы – хиггсовского бозона H , обнаружение которого является одной из задач начавшего работу в 2009 году Большого Адронного Коллайдера ЦЕРН (БАК, LHC).

В лекциях излагается калибровочная электрослабая теория и обсуждается ее возможное дальнейшее развитие (теории Великого Объединения, суперсимметричные теории). Большой Адронный Коллайдер, возможно, позволит не только найти бозон Хиггса (последнюю не открытую частицу Стандартной Модели), но и покажет, какая Новая Физика лежит за рамками $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ теории.

Л Е К Ц И Я 1

Неперенормируемость 4-фермионного взаимодействия, теория массивного векторного бозона – опять неперенормируемость, эффект Голдстоуна – спонтанное “нарушение” симметрии: $SU(2)_L \times SU(2)_R$ симметрия КХД, π -мезоны, соотношение Гольдбергера-Треймана, решаемые примеры: Z_2 , $U(1)$, $O(3)$, $SU(2)$.

Надежно установлено, что локальное 4-фермионное взаимодействие хорошо описывает слабые взаимодействия лептонов и кварков. Взаимодействие имеет вид произведения ток×ток; фермионный ток дается разностью векторного и аксиального токов: $(V-A) \times (V-A)$. Сила (вернее, слабость) взаимодействия обусловлена малостью фермиевской константы G_F . Приведем 4-фермионный лагранжиан, ответственный за распад мюона:

$$\mathcal{L}_W = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \mu \bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e, \quad (1.1)$$

где $G_F \approx 10^{-5}/m_p^2 \approx (1/300 \text{ ГэВ})^2$. Соответствующая фейнмановская диаграмма показана на рис. 1.1.

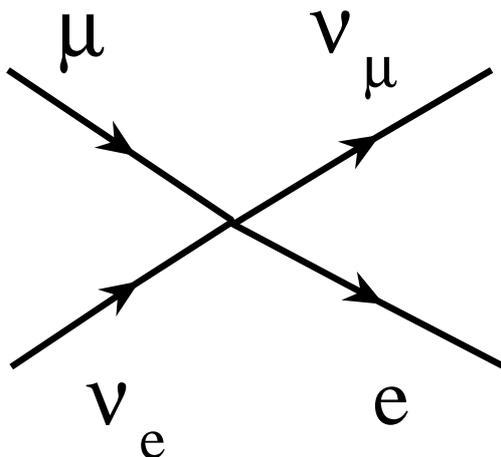


Рис. 1.1 Распад мюона в локальной 4-х-фермионной теории.

Аналогичное (1.1) взаимодействие с универсальной константой G_F описывает целый ряд наблюдавшихся процессов с лептонами ($\nu_\mu e \rightarrow \mu \nu_e$ – рассеяние, $\tau \rightarrow \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu$ и $\tau \rightarrow \nu_\tau e \bar{\nu}_e$ распады) и кварками (β -распад нейтрона, распады π - и K -мезонов и т.д.). Тем не менее оно не может рассматриваться как фундаментальное: 4-фермионная теория неперенормируема. Проще всего это увидеть из анализа размерностей. Константы связи перенормируемых теорий либо безразмерны (заряд в КЭД), либо имеют размерность

положительной степени энергии. Если константа связи имеет размерность отрицательной степени энергии, то ряд теории возмущений по степеням константы связи является одновременно рядом по положительным степеням энергии. Вычисление членов ряда теории возмущений требует суммирования по промежуточным состояниям, что сводится к интегрированию по импульсам виртуальных частиц. Из соображений размерности следует, что ряд по G_F окажется рядом по $(G_F \Lambda^2)$, где Λ -ультрафиолетовое обрезание (импульсами внешних частиц при анализе ультрафиолетового поведения интегралов можно пренебречь). Таким образом любая амплитуда 4-фермионной теории оказывается расходящейся, начиная с некоторого (может быть достаточно высокого) члена теории возмущений, то есть не может быть вычислена (сравните со случаем КЭД, где расходится масса электрона и его заряд, остальные же амплитуды конечны и вычислимы, что и означает перенормируемость теории).

Итак, древесные амплитуды, вычисляемые по лагранжианам типа (1.1), хорошо описывают экспериментальные данные, в то время как поправки к ним невычислимы – последовательная теория отсутствует. Поправки к амплитудам сравниваются с древесными выражениями при обрезании $\Lambda \approx 1/\sqrt{G_F} \approx 300\text{ГэВ}$, поэтому успешное описание опытных данных древесными формулами объяснимо, если теория при меньших энергиях видоизменяется, превращаясь в перенормируемую.

Поучительно посмотреть на зависимость сечения рассеяния $\nu_e e \rightarrow \nu_e e$ от энергии.

В четырехфермионной теории сечение упругого $\nu_e e$ -рассеяния при высокой энергии равно (см. лекцию 7)

$$\sigma_{\nu_e e} = \frac{G_F^2 s}{\pi} , \quad (1.2)$$

где $s = (k_1 + p_1)^2$ – квадрат инвариантной энергии. В с.ц.и. дифференциальное сечение не зависит от угла рассеяния, поэтому рассеяние происходит только в состоянии с полным моментом ноль. Для амплитуды рассеяния с моментом J из соотношения унитарности может быть получено следующее неравенство (см. лекцию 6, $|\vec{p}|$ – импульс частиц в с.ц.и.):

$$(\text{Re} f^J(s))^2 \leq \frac{1}{4|\vec{p}|^2} , \quad (1.3)$$

где дифференциальное сечение рассеяния связано с амплитудой стандартной формулой

$$\frac{d\sigma}{dO} = |f(s, \cos \theta)|^2 , \quad (1.4)$$

а амплитуда рассеяния разлагается по парциальным амплитудам с помощью матриц конечных вращений:

$$f(s, \cos \theta) = \sum_J (2J + 1) D_{\Lambda' \Lambda}^J f^J = f^0 . \quad (1.5)$$

Последнее равенство имеет место в нашем случае.

Итак, согласно соотношению унитарности

$$\sigma_{\nu_e e} \leq \frac{4\pi}{s} , \quad (1.6)$$

и сечение (1.2) превосходит унитарный предел при $\sqrt{s} > \sqrt{2\pi/G_F}$, т.е. рассеивается больше частиц, чем падает, что, очевидно, нелепо. Опять-таки мы видим, что лагранжиан (1.1) может рассматриваться как эффективный низкоэнергетический, при высоких же энергиях теория должна меняться.

Хорошо известный пример перенормируемой теории – квантовая электродинамика. Естественный путь приблизиться к КЭД – “расшить” взаимодействие ток×ток, заменив его на обмен векторным бозоном:

$$\mathcal{L}_{W_\alpha} = g [\bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \mu + \bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) e] W_\alpha^- . \quad (1.7)$$

Константа g этого взаимодействия безразмерна, и обсуждавшаяся до сих пор причина неперенормируемости слабых взаимодействий устранена. Каким образом из лагранжиана (1.7) может быть получено взаимодействие ток×ток (1.1)? Для этого следует предположить, что промежуточный векторный бозон W_α тяжелый.

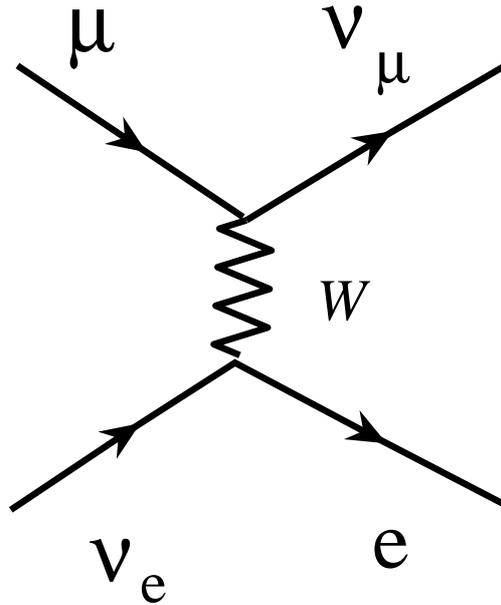


Рис. 1.2 Распад мюона в теории с промежуточным векторным бозоном.

Тогда при энергиях много меньше его массы диаграмма рис. 1.2 сведется к диаграмме рис. 1.1 (т.к. пропагатор W -бозона может быть “стянут в точку”: $1/(k^2 - M_W^2) \rightarrow 1/(-M_W^2)$), и мы получим “микроскопическую” теорию фермиевской константы:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{M_W^2} . \quad (1.8)$$

Требование $g \leq 1$ приводит к верхнему ограничению на массу промежуточного бозона: $M_W \leq 300\text{ГэВ}$. В случае сильной связи ($g \approx 1$) $M_W \approx 300\text{ГэВ}$; если константа g порядка заряда электрона $e = \sqrt{4\pi\alpha} \approx 0.3$, то $M_W \approx 100\text{ГэВ}$. Совсем легким W -бозон быть не может, т.к. при характерных импульсах $\sim 1\text{ГэВ}$ а должна воспроизводиться 4-фермионная теория. С точки зрения теорий Великого Объединения величина g порядка e представляется естественной, и экспериментальное значение $M_W \approx 80\text{ГэВ}$ служит одним из аргументов в пользу этих теорий (см. лекцию 11).

Итак, является ли теория с массивным промежуточным векторным бозоном перенормируемой? Свободный лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}M^2 A_\mu^2, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.9)$$

приводит к следующим уравнениям движения $\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\alpha} = \partial_\beta \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\beta A_\alpha}\right)$:

$$\begin{aligned} M^2 A_\alpha &= \partial_\beta \left[-\frac{1}{2}F_{\mu\nu} \frac{\delta F_{\mu\nu}}{\delta\partial_\beta A_\alpha} \right] = \partial_\beta \left[-\frac{1}{2}F_{\mu\nu} (g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha}) \right] = \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\beta (F_{\beta\alpha} - F_{\alpha\beta}) = -\partial_\beta F_{\beta\alpha} , \\ \partial_\beta \partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta A_\beta + M^2 A_\alpha &= 0 . \end{aligned} \quad (1.10)$$

В импульсном представлении получим следующие уравнения движения и уравнения для функции Грина массивного векторного поля:

$$(k^2 - M^2)A_\alpha - k_\alpha k_\beta A_\beta = 0 \implies k_\alpha A_\alpha = 0 , \quad (1.11)$$

$$\left[(k^2 - M^2)g_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta \right] G_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} . \quad (1.12)$$

Окончательно для функции Грина получим

$$G_{\alpha\beta} = \frac{g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M^2}}{k^2 - M^2} . \quad (1.13)$$

Ее полюс при $k^2 = M^2$ означает правильность коэффициента $1/2$ при массовом члене в (1.9).

На массовой оболочке ($k^2 = M^2$) числитель функции Грина поперечен ($k_\alpha \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M^2} \right) = 0$), что отвечает условию на вектор поляризации массивного поля спина 1: $k_\alpha A_\alpha = 0$ (последнее условие является обобщением на движущуюся частицу равенства нулю компоненты A_0 в ее системе покоя).

Второй член в числителе ф-лы (1.13) таит в себе опасность: функция Грина массивного векторного поля не падает $\sim 1/k^2$ при $k^2 \rightarrow \infty$, и счет степеней расходимости петлевых графиков опять-таки демонстрирует перенормируемость теории. Если бы массивный векторный бозон взаимодействовал с сохраняющимся током, $\partial_\alpha J_\alpha = 0$, то

вклад опасного члена в (1.13) занулялся бы, и мы имели последовательную перенормируемую квантовую теорию поля. Такой является КЭД с массивным фотоном. Но в случае слабых взаимодействий мы имеем аксиальные и недиагональные векторные токи, которые не сохраняются:

$$i\partial_\alpha \bar{\psi}_1 \gamma_\alpha \psi_2 = (m_2 - m_1) \bar{\psi}_1 \psi_2 \quad , \quad (1.14)$$

$$i\partial_\alpha \bar{\psi}_1 \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_2 = -(m_2 + m_1) \bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2 \quad . \quad (1.15)$$

Теория массивного векторного поля, взаимодействующего с несохраняющимися токами, неперенормируема.

Нормированный на единицу вектор поляризации поля векторного бозона подчинен следующему условию:

$$k_\alpha e_\alpha = 0 \quad , \quad (1.16)$$

которое допускает 3 решения:

$$e_\alpha^{(1)} = (0, 1, 0, 0), \quad e_\alpha^{(2)} = (0, 0, 1, 0), \quad e_\alpha^{(3)} = \left(\frac{|\bar{k}|}{M}, 0, 0, \frac{E}{M} \right) \quad , \quad (1.17)$$

где предположено, что частица летит вдоль третьей оси. Числитель функции Грина поля W_α совпадает с матрицей плотности $\rho_{\alpha\beta} = e_\alpha^i e_\beta^i$. Первые два вектора поляризации те же, что у безмассового фотона. Сингулярное при больших импульсах поведение возникает от продольной поляризации $e^{(3)}$:

$$e_\alpha^{(3)} = \frac{k_\alpha}{M} - \frac{M}{E + |\bar{k}|} (1, 0, 0, -1). \quad (1.18)$$

Итак, лагранжиан (1.9) свободного массивного векторного поля приводит к неперенормируемой теории. Можно ли как-то еще получить массивное векторное поле, не вводя массовый член в исходный лагранжиан? Плодотворным примером является эффект Мейснера – вытеснение магнитного поля из сверхпроводника. Безмассовое в вакууме поле фотона набирает в сверхпроводнике массу, что приводит к экспоненциальному затуханию магнитного поля вглубь сверхпроводника. Феноменологический лагранжиан Гинзбурга-Ландау, описывающий эффект Мейснера, включает наряду с полем фотона скалярный “параметр порядка” φ , ненулевое среднее значение которого в среде приводит к возникновению массы фотона. Нетривиальные свойства вакуума не влияют на поведение амплитуд при высоких энергиях, поэтому изначально перенормируемая теория останется таковой. Вопрос о форме пропагатора векторного поля в теории указанного типа (называемой теорией со “спонтанно нарушенной симметрией”) отложим до следующей лекции; сейчас же сосредоточимся на поле φ . Для того, чтобы безмассовое векторное поле получило массу, оно должно смешаться с безмассовой частицей.

Как обеспечить существование безмассовой скалярной частицы? Взаимодействие перенормирует затравочную массу, поэтому безмассовый скаляр выглядит чрезвычайно искусственным.

Эффект Голдстоуна позволяет получить безмассовые частицы естественным образом. Начнем с еще одного примера из физики твердого тела. Взаимодействие спинов в ферромагнетике $O(3)$ симметрично. Основное состояние характеризуется вектором магнитного момента и имеет $O(2)$ -симметрию вращения относительно этого вектора. Две “пропавшие” симметрии ($O(3)$ имеет 3 генератора, $O(2)$ – один) реализуются в виде двух поляризации магнона, или спиновой волны. Спиновая волна может иметь произвольно малую энергию (большую длину волны), т.е. масса магнона равна нулю. Итак, $O(3)$ -симметрия исходного гамильтониана реализуется в виде $O(2)$ -симметрии основного состояния плюс два голдстоуновских бозона. Описанное явление получило не совсем удачное название “спонтанное нарушение симметрии”. Симметрия лагранжиана не нарушена; она реализуется необычным способом.

В квантовой теории имеется 2 способа реализации симметрии.

1. Основное состояние имеет симметрию исходного лагранжиана. При этом возбуждения реализуют представления исходной группы симметрии. Так, в частности, реализуются симметрии в квантовой механике систем с конечным числом степеней свободы (Например, $O(3)$ симметрия атома водорода). Такая реализация получила название реализации Вигнера – фон Неймана.
2. Основное состояние имеет меньшую симметрию, а “нарушенным” генераторам отвечают безмассовые скалярные частицы (голдстоуновские бозоны). “Нарушенная” симметрия сдвигает поле “своего” голдстоуна на константу – т.е. симметрия реализуется на безмассовых бозонах. Такая реализация называется реализацией Намбу-Голдстоуна.

Физика легких кварков дает прекрасный пример различных реализаций симметрии. Характерный масштаб сильных взаимодействий $\Lambda_{\text{КХД}} \approx 300$ МэВ намного больше масс u - и d -кварков, поэтому хорошим нулевым приближением должна служить модель с $m_u = m_d = 0$. В этом приближении лагранжиан КХД имеет $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -симметрию относительно независимых вращений левых и правых кварковых полей. (В пределе $m_u = m_d \neq 0$ остается одна $SU(2)_V$ -симметрия (V - от слова “вектор”)). Следовательно, в теории должно иметься $3 + 3 = 6$ сохраняющихся токов. На кварковых полях эти токи выписываются немедленно:

$$J_{\alpha ij}^{\pm} = \bar{q}_i \gamma_{\alpha} (1 \pm \gamma_5) q_j ; \quad (1.19)$$

вопрос в том, как они выглядят на существующих в природе адронах. Половину токов дает добрая старая изотопическая $SU(2)_V$ -симметрия. Адроны формируют $SU(2)_V$ -

мультиплеты: дублет нуклонов p, n ; триплет Σ -гиперонов; дублет Ξ -гиперонов и т.д. Кстати, неплохим приближением является легкость и третьего, странного кварка: $m_s \ll \Lambda$. При этом мы приходим к $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ -симметрии, векторная часть которой – Гелл-Манновская $SU(3)$ – реализуется на хорошо известных октете и декуплете гиперонов. Возвращаясь к $SU(2)$ -симметрии, запишем триплет сохраняющихся векторных токов на дублете нуклонов:

$$SU(2)_V : \begin{cases} \bar{p}\gamma_\alpha n \\ \bar{p}\gamma_\alpha p - \bar{n}\gamma_\alpha n \\ \bar{n}\gamma_\alpha p \end{cases} \quad (1.20)$$

Аналогичная реализация $SU(2)_A$ -симметрии требует наличия дублета нуклонов (P, N), вырожденных по массе с протоном и нейтроном и имеющих противоположную P -четность. Но и это бы не помогло – аномалия в дивергенции кваркового тока $\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u - \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 d$ требует существования безмассовых в пределе $m_u, m_d \rightarrow 0$ адронов: $\langle 0 | \bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u - \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 d | \gamma\gamma \rangle \sim \frac{q_\mu}{q^2} F \tilde{F}$. Поэтому аксиальная симметрия спонтанно нарушена; она реализуется на триплете (почти) безмассовых π -мезонов. Параметром порядка служит сумма билинейных произведений кварковых полей. В вакууме $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle \neq 0$. Триплет сохраняющихся аксиальных токов строится следующим образом:

$$SU(2)_A : \left(g_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) \begin{cases} \bar{p}\gamma_\alpha\gamma_5 n \\ \bar{p}\gamma_\alpha\gamma_5 p - \bar{n}\gamma_\alpha\gamma_5 n \\ \bar{n}\gamma_\alpha\gamma_5 p \end{cases} ; \quad (1.21)$$

полюс при $q^2 = 0$ отвечает обмену безмассовыми π^\pm - и π^0 -мезонами (отличие их масс от нуля обусловлено небольшими массами u - и d - кварков). В случае более сильно нарушенной массой странного кварка $SU(3)_A$ -симметрии мы приходим к октету безмассовых мезонов: $3\pi, 4K, \eta$. Именно поэтому реализация $SU(3)_V$ -симметрии иллюстрировалась гиперонами, а не мезонами.

Заряженный ток J_α^{A+} появляется в β -распаде нейтрона (см. рис. 1.3).

Из требования сохранения аксиального тока получаем знаменитое соотношение Гольдбергера-Треймана, выражающее аксиальную константу g_A β -распада нейтрона через пион-нуклонную константу связи $G_{\pi NN}$ ($\frac{G_{\pi NN}^2}{4\pi} = 14$) и константу распада пиона f_π ($f_\pi = 130$ МэВ):

$$g_A = \frac{f_\pi G_{\pi NN} \sqrt{2}}{2m_N} \approx 1.30 \quad , \quad (1.22)$$

что очень близко к экспериментальной величине $g_A = 1.25$.

Задача 1. Используя диаграммы рис. 1.3, доказать соотношение Гольдбергера-Треймана (1.22).

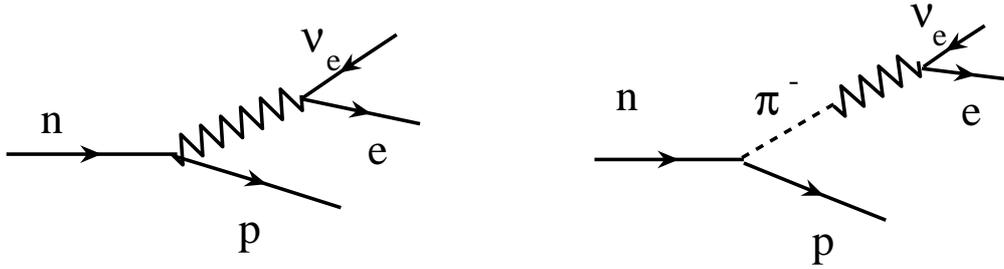


Рис. 1.3 Диаграммы, приводящие к (частичному) сохранению аксиального тока в распаде нейтрона за счет (почти) безмассового π – мезона.

Мы начали рассмотрение явления спонтанного нарушения симметрии с аксиальной симметрии лагранжиана КХД, т.к. эта симметрия реализуется в природе по нанбу-голдстоуновскому сценарию. Однако доказать, что именно так реализуется эта симметрия, “в лоб”, исходя из лагранжиана КХД, сегодня невозможно – мы имеем дело с теорией сильной связи. Перейдем к рассмотрению простых решаемых моделей теории поля, в которых симметрия спонтанно нарушается. Ниже будут рассмотрены четыре примера, после чего доказана общая теорема.

1. Z_2 . Имеется одно вещественное скалярное поле $\varphi(x)$, динамика которого описывается следующим лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{\lambda^2}{2}[\varphi^2 - \eta^2]^2, \quad (1.23)$$

инвариантным относительно дискретного преобразования $\varphi \rightarrow -\varphi$.

На постоянных в пространстве и времени полях гамильтониан сводится к потенциальной энергии

$$V(\varphi) = \frac{\lambda^2}{2}[\varphi^2 - \eta^2]^2, \quad (1.24)$$

имеющей два минимума: $\varphi = \pm\eta$. Квантовать систему следует в окрестности одного из них, тем самым нарушая симметрию исходного лагранжиана. Наряду с малыми возмущениями вакуумного состояния – элементарными квантами поля φ – имеется классическое решение (кинк), интерполирующее между двумя вакуумами. Кинк – это плоская “доменная стенка”, разделяющая области, в которых поле φ имеет значение $+\eta$ и $-\eta$. Существование таких стенок важно для космологии (Зельдович, Кобзарев, Окунь).

Можно добавить в рассматриваемую систему частицы со спином $1/2$ таким образом, что их безмассовые возбуждения будут существовать только в той области пространства, где поле кинка проходит через ноль. Такой “мир на стенке”, изобретенный Рубаковым и Шапошниковым, широко используется для объяснения ненаблюдаемости возможно существующих дополнительных к нашим трем пространственным координат.

Задача 2. Рассмотрим систему, описываемую лагранжианом (1.23), в двумерном пространстве-времени (t, x) . Найдите аналитически статическое решение уравнения движения для поля φ с асимптотиками $\varphi(x = +\infty) = \eta$, $\varphi(x = -\infty) = -\eta$ – кинк. (Воспользуйтесь аналогией с законом Ньютона, запишите закон сохранения энергии и проинтегрируйте его). Найдите массу и размер кинка. Определите, при каких значениях параметров квантовые (петлевые) поправки будут малы. Сравните массу кинка с массой элементарного возбуждения над тривиальным вакуумом $\varphi = \eta$. Сравните комptonовскую длину волны кинка и его размер.

2. $U(1)$. Имеется одно комплексное скалярное поле $\phi(x)$, описываемое следующим лагранжианом:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left[\phi^+ \phi - \frac{\eta^2}{2} \right]^2, \quad (1.25)$$

инвариантным относительно абелева унитарного преобразования $\phi(x) = e^{i\lambda} \phi'(x)$.

Рассмотрим два возможных случая.

а) $\eta^2 < 0$.

Зависимость $V(|\phi|)$ показана на рис. 1.4 а). Имеется одно комплексное поле ϕ с массой $\lambda|\eta|/\sqrt{2}$. Вакуумное среднее ϕ равно нулю; в теории имеется нетривиальное взаимодействие.

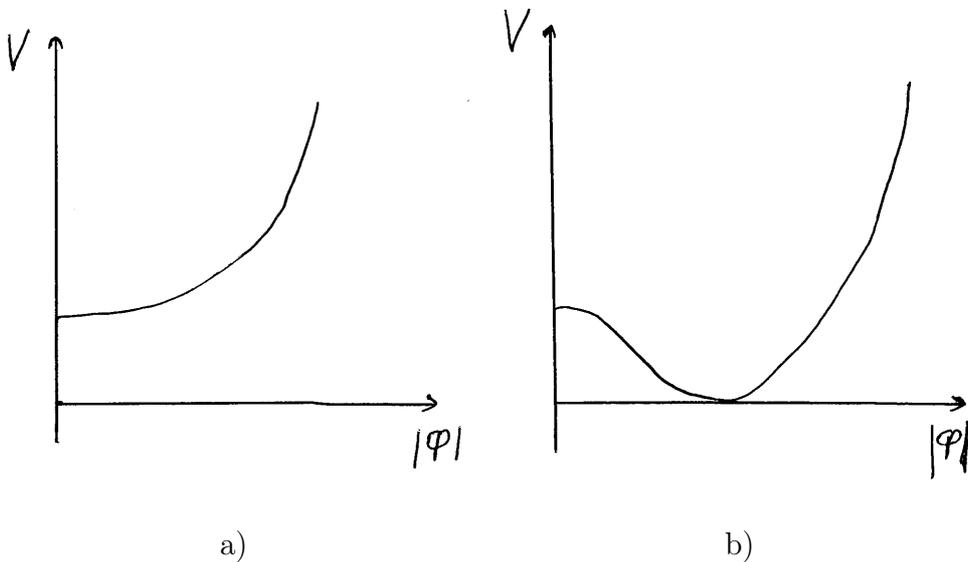


Рис.1.4 Обычная (а) и приводящая к эффекту Голдстоуна (б) зависимости плотности потенциальной энергии от $|\phi|$.

б) $\eta^2 > 0$

Зависимость $V(|\phi|)$ показана на рис.1.4 б). Функция $V(\phi_x, \phi_y)$ получается вращением графика рис. 1.4 б). вокруг вертикальной оси. Полученная фигура напоминает доньшко бутылки, или перевернутое сомбреро. Вместо одного минимума потенциала здесь имеется кольцо минимумов: $|\phi| = \frac{\eta}{\sqrt{2}}$, фаза ϕ произвольна. Квантование следует проводить относительно какой-либо точки на этом кольце. Колебанию вдоль модуля ϕ отвечает массивное скалярное поле; его масса определяется крутизной стенок. Движению вдоль фазы ϕ отвечает безмассовое поле – голдстоуновский бозон. $U(1)$ -симметрия в спектре масс частиц нарушена (при $\eta^2 < 0$ имеется 2 вырожденных вещественных поля: ϕ_x и ϕ_y); она реализуется на голдстоуновском бозоне. Происходит спонтанное нарушение симметрии. Итак, раскладываем ϕ относительно вакуумного значения, которое выбираем вещественным:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho(x) + \eta)e^{i\alpha(x)} . \quad (1.26)$$

Подставляя (1.26) в (1.25), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}|\partial_\mu \rho + i\partial_\mu \alpha(\eta + \rho)|^2 - \frac{\lambda^2}{8}(2\eta\rho + \rho^2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2}\eta^2(\partial_\mu \alpha)^2 - \frac{\lambda^2 \eta^2}{2}\rho^2 + (\partial_\mu \alpha)^2 \left(\frac{\rho^2}{2} + \eta\rho \right) - \frac{\lambda^2}{8}(\rho^4 + 4\eta\rho^3). \end{aligned}$$

В теории имеется одна частица ρ с массой $\lambda\eta$ и одна безмассовая частица – голдстоуновский бозон α . $U(1)$ симметрия $\alpha(x) = \alpha'(x) + \lambda$ проявляется в том, что масса α равна нулю, а ее взаимодействие пропорционально импульсу. Рассмотренный пример иллюстрирует все характерные черты эффекта Голдстоуна.

В основе электрослабой теории лежит неабелева $SU(2) \times U(1)$ симметрия, поэтому посмотрим на эффект Голдстоуна в неабелевом случае.

3. $O(3)$ – простейшая неабелева группа. Рассмотрим вектор вещественных скалярных полей $A_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, описываемых лагранжианом с той же характерной формой потенциальной энергии:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_i)^2 - \lambda^2(A_i^2 - \eta^2)^2 . \quad (1.27)$$

Лагранжиан обладает $O(3)$ -симметрией. Спонтанное нарушение симметрии происходит при положительном η^2 . Новый вакуум характеризуется вектором A_i^0 , $|A_i^0| = \eta$, имеющим произвольное направление в изопространстве. В теории остается $O(2)$ симметрия относительно вращений вокруг вектора A_i^0 . Спектр масс теории состоит из пары голдстоуновских бозонов (если A_i^0 смотрит вдоль третьей оси, то это поля A_1 и A_2 с нулевыми вакуумными средними) и одной массивной частицы. Голдстоуновских бозонов два, так как имеющая 3 генератора группа $O(3)$ нарушилась до абелевой группы

$O(2)$, $3 - 1 = 2$. Выбирая вакуумное среднее вдоль третьей оси, запишем:

$$\begin{aligned} A_3(x) &= \eta + \tilde{A}_3(x), \\ A_{1,2}(x) &= \tilde{A}_{1,2}(x) \quad , \end{aligned} \quad (1.28)$$

где тильдой обозначены квантовые поля. Подставляя разложение (1.28) в (1.27), получим лагранжиан теории с описанным выше спектром масс.

Задача 3. Нарисовать все древесные графики, дающие вклад в реакцию аннигиляции $\tilde{A}_1\tilde{A}_1 \rightarrow \tilde{A}_2\tilde{A}_2$. Показать, что сумма графиков зануляется при стремлении к нулю импульсов сталкивающихся частиц.

4. Спинорное представление группы $SU(2)$. Лагранжиан изодублета H имеет вид:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu H|^2 - \frac{\lambda^2}{2}[H^+ H - \eta^2/2]^2 \quad . \quad (1.29)$$

Выбирая вакуумное среднее в виде

$$\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

и раскладывая поле H в окрестности вакуума

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_1(x) + iH_2(x) \\ \eta + H_3(x) + iH_4(x) \end{pmatrix} \quad , \quad (1.31)$$

найдем, что в теории имеются три голдстоуновских поля H_1, H_2 и H_4 , а поле H_3 имеет массу $\lambda\eta$. Три голдстоуновских бозона отвечают трем нарушенным генераторам группы $SU(2)$. На самом деле лагранжиан (1.29) имеет более широкую $SU(2) \times U(1)$ -симметрию, где $U(1)$ отвечает вращению всего спинора H . Вакуумное состояние (1.30) инвариантно относительно преобразования, генерируемого суммой T_3 и генератора $U(1)$ -вращения, поэтому счет голдстоуновских бозонов происходит так: $4 - 1 = 3$. В электрослабой теории ненарушенная симметрия отвечает электродинамике, а три голдстоуновских бозона, смешиваясь с безмассовыми калибровочными полями, дают массы W^\pm - и Z -бозонам.

Общее доказательство теоремы Голдстоуна основано на рассмотрении тока, сохраняющегося в силу имеющейся в теории глобальной симметрии. Если в системе имеется нетривиальный вакуум, то в токе появляется линейный по полю член

$$j_\mu = \phi^+ \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^+ = \eta \partial_\mu \tilde{\phi} - \eta \partial_\mu \tilde{\phi}^+ + \tilde{\phi}^+ \partial_\mu \tilde{\phi} - \tilde{\phi} \partial_\mu \tilde{\phi}^+ \quad , \quad (1.32)$$

При этом из сохранения тока следует безмассовость поля $\text{Im}\tilde{\phi}$:

$$\partial_\mu j_\mu = \eta \partial_\mu \partial_\mu \text{Im}\tilde{\phi} + \dots = 0 \quad , \quad (1.33)$$

где более высокие по полям члены отброшены – оставлен только линейный член.

Л Е К Ц И Я 2

Локальная $U(1)$, эффект Хиггса, бозон Хиггса, унитарная калибровка, калибровка Ландау, R_ξ -калибровки.

В предыдущей лекции при обсуждении эффекта Голдстоуна мы рассматривали инвариантные относительно *глобальных* (не зависящих от координаты x_μ) непрерывных преобразований теории. Если минимум потенциальной энергии в таких теориях достигается при значении поля, не инвариантном относительно преобразований симметрии, то в теории возникают безмассовые скалярные поля – голдстоуновские бозоны. Посмотрим, что произойдет в вышеописанной ситуации, если исходная симметрия была локальной. Рассмотрим простейший пример – одно комплексное скалярное поле, инвариантное относительно *локального* $U(1)$ преобразования:

$$\phi(x) = e^{i\Lambda(x)}\phi'(x) . \quad (2.1)$$

Для поддержания инвариантности кинетического члена поля ϕ необходимо ввести векторное поле A_μ со следующим законом преобразования:

$$A_\mu(x) = A'_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x) . \quad (2.2)$$

Локально-инвариантное обобщение лагранжиана (1.25) имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = |(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi|^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left[\phi^+\phi - \frac{\eta^2}{2} \right]^2 , \quad (2.3)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – калибровочно-инвариантный тензор векторного поля. При $\eta^2 < 0$ мы имеем электродинамику массивного скалярного поля ϕ . При $\eta^2 > 0$ знак массы поля ϕ меняется, поэтому точка $\langle \phi \rangle = 0$ становится неустойчивой. Модуль вакуумного среднего поля ϕ определяется формой потенциальной энергии; фаза – произвольна (положение вдоль донышка бутылки). Выберем ее равной нулю и разложим поле в окрестности вакуума:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \rho(x) + i\varphi(x)) . \quad (2.4)$$

Подставим это разложение в лагранжиан (2.3):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}|\partial_\mu\rho + i\partial_\mu\varphi - ieA_\mu\eta - ieA_\mu\rho + eA_\mu\varphi|^2 - \frac{\lambda^2}{8}[2\eta\rho + \rho^2 + \varphi^2]^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}e^2\eta^2 A_\mu^2 - e\eta A_\mu\partial_\mu\varphi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\eta^2\rho^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \\ &+ eA_\mu\varphi\partial_\mu\rho + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2\rho^2 + e^2\eta\rho A_\mu^2 - e\rho A_\mu\partial_\mu\varphi - \frac{\lambda^2}{2}\eta\rho(\rho^2 + \varphi^2) - \end{aligned}$$

$$-\frac{\lambda^2}{8}(\rho^2 + \varphi^2)^2 . \quad (2.5)$$

Перед тем как перейти к физике, описываемой полученным лагранжианом, вернемся к эффекту Голдстоуна.

При $A_\mu \equiv 0$ лагранжиан (2.5) описывает ту же систему, что и лагранжиан (1.26); голдстоуновский бозон теперь описывается полем φ . Полезно подумать, как при этом из лагранжиана (2.5) получается пропорциональность импульсу взаимодействия голдстоуновского бозона φ , которая явно следует из (1.27) для голдстоуновского бозона α .

Займемся квадратичными по полям членами. Поле ρ описывает массивную частицу, которая называется бозоном Хиггса; $m_\rho = \lambda\eta$. Векторное поле A_μ смешивается с голдстоуновским бозоном φ членом $-e\eta A_\mu \partial_\mu \varphi$, с которым нам предстоит разобраться. Простейший способ сделать это – совершить калибровочное преобразование

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi'(x) + \eta\Lambda(x) \\ A_\mu(x) &= A'_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

со следующим параметром преобразования:

$$\Lambda(x) = \frac{\varphi(x)}{\eta} . \quad (2.7)$$

Новое поле φ' тождественно равно нулю, а поле $\varphi(x)$ “поглощается” новым векторным полем:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e\eta}\partial_\mu\varphi(x) , \quad (2.8)$$

образуя его продольную компоненту. В лагранжиане (2.5) остаются члены, не содержащие поля φ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}e^2\eta^2 A_\mu^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\eta^2\rho^2 + \mathcal{L}_{\text{вз}}(A_\mu, \rho) , \quad (2.9)$$

где мы опустили штрих у поля A_μ . При таком выборе калибровки физические поля четко видны: векторное массивное поле A_μ , $m_A = e\eta$, и бозон Хиггса ρ . Поэтому эта калибровка получила название унитарной. Возникновение массы у векторного поля при отличном от нуля параметре порядка ϕ – знаменитое свойство феноменологического лагранжиана Гинзбурга-Ландау, описывающего сверхпроводимость. В физике частиц это явление было (пере)открыто в 60-е годы и получило название эффекта Хиггса. Отметим, что число степеней свободы в нарушенной и ненарушенной фазах совпадает: $2+2=3+1$.

Переход к унитарной калибровке помогает разобраться в составе частиц нашей модели; для анализа перенормируемости теории эта калибровка нехороша. Если искать

пропагатор векторного поля, отвечающий лагранжиану (2.9), то мы получим тот же пропагатор (1.13), что и в случае “жесткого” введения массы векторного поля, который имеет плохое поведение в области больших импульсов и приводит к неперенормируемости теории. Кажущаяся неперенормируемость теории с “мягким” введением массы калибровочного поля связана с сингулярным калибровочным преобразованием, обращающим в ноль поле $\varphi'(x)$. Перенормируемость таких теорий была доказана в начале 70-х годов, однако простые аргументы позволяли с самого начала надеяться, что удалось найти способ построения перенормируемой теории массивного векторного поля – теории слабого взаимодействия (Салам, 1968). Дело в том, что вопрос перенормируемости – это поведение теории при больших импульсах, в ультрафиолетовом пределе. Свойства вакуума – это поведение теории при малых импульсах, в инфракрасном пределе. Поэтому перенормируемость не должна зависеть от формы вакуума теории. Лагранжиан (2.3) при отрицательном η^2 описывает электродинамику скалярного поля – хорошо известную перенормируемую теорию. При изменении знака η^2 свойства вакуума кардинально меняются, но на поведении амплитуд при больших переданных импульсах это сказаться не должно – теория должна остаться перенормируемой.

От общих рассуждений вернемся к лагранжиану (2.3). Напомним, что для нахождения пропагатора фотона в квантовой электродинамике в лагранжиан приходится добавлять фиксирующий калибровку член

$$\mathcal{L}_\xi = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2, \quad (2.10)$$

после чего для пропагатора фотона находим

$$G_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu} - (1 - \xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2}. \quad (2.11)$$

Калибровочная инвариантность исходной теории приводит к сохранению тока, в силу чего амплитуды не зависят от второго члена в числителе пропагатора фотона и, значит, от ξ . Т.к. в пределе $\xi \rightarrow \infty$ лагранжиан (2.10) переходит в исходный, пропагатор (2.11) позволяет вычислять амплитуды исходной теории – калибровочно-инвариантной квантовой электродинамики. Отметим несколько полезных калибровок: $\xi = 1$ – калибровка Фейнмана, в которой пропагатор фотона имеет наиболее простой вид; $\xi = 0$ – калибровка Ландау (в ней пропагатор фотона поперечен); калибровку с $\xi = \infty$ следует назвать унитарной (она никогда не используется в КЭД, но именно в ней лагранжиан (2.10) приобретает свою первоначальную форму). Наш следующий шаг – это КЭД в калибровке Ландау + скаляр в голдстоуновской ситуации, т.е. мы рассматриваем лагранжиан (2.3) с фиксирующей калибровку добавкой при $\eta^2 > 0$. Выпишем квадратичные члены по полям фотона и голдстоуновского бозона:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2}e^2\eta^2 A_\mu^2 - e\eta A_\mu \partial_\mu \varphi. \quad (2.12)$$

Наша задача – нахождение пропагаторов полей A_μ и φ . Будем работать в рамках теории возмущений по заряду e . В нулевом приближении в калибровке Ландау имеем

$$G_{\mu\nu}^0 = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2}, \quad G_\varphi^0 = \frac{1}{k^2}. \quad (2.13)$$

Теперь следует выяснить, как последние два члена в (2.12) изменяют пропагаторы A_μ и φ . Очевидно, что в силу поперечности $G_{\mu\nu}^0$ в калибровке Ландау пропагатор поля φ не перенормируется; по той же причине не возникает недиагонального пропагатора, отвечающего переходам $\varphi \rightarrow A_\mu$ и $A_\mu \rightarrow \varphi$.

Вычисление пропагатора поля A_μ начнем с нахождения поляризационного оператора векторного поля $\Pi_{\mu\nu}$, итерации которого дают “одетый” пропагатор фотона $G_{\mu\nu}$:

$$-iG_{\mu\nu} = -iG_{\mu\nu}^0 + (-iG_{\mu\rho}^0)(i\Pi_{\rho\sigma})(-iG_{\sigma\nu}^0) + \dots \quad (2.14)$$

Поляризационный оператор дается суммой двух диаграмм (см. рис. 2.1),



Рис. 2.1 Две диаграммы, описывающие вклад $\sim e^2$ в поляризационный оператор векторного бозона.

вычисляя которые, получим

$$i\Pi_{\rho\sigma} = (-ie\eta)^2 k_\rho k_\sigma \frac{i}{k^2} + \frac{1}{2} 2e^2 \eta^2 i g_{\rho\sigma} = ie^2 \eta^2 \left(g_{\rho\sigma} - \frac{k_\rho k_\sigma}{k^2} \right). \quad (2.15)$$

Поперечность поляризационного оператора следует из калибровочной инвариантности теории; полюс при $k^2 = 0$ обусловлен обменом безмассовым голдстоуновским бозоном. Сосуществование этих двух свойств приводит к калибровочно-инвариантной теории массивного векторного поля. Впервые в квантовой теории поля такое явление обнаружил Швингер в КЭД безмассовых фермионов в двумерном пространстве-времени. Отсутствие щели (наличие безмассовых возбуждений) также привело к появлению динамической массы фотона.

Подставляя (2.15) в (2.14) и используя явное выражение для $G_{\mu\nu}^0$, находим пропагатор векторного поля; таким образом, в калибровке Ландау ($\xi \rightarrow 0$) лагранжиан (2.12) приводит к следующим пропагаторам:

$$G_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2 - e^2 \eta^2}, \quad G = \frac{1}{k^2}. \quad (2.16)$$

Полученные пропагаторы падают при больших k^2 как $1/k^2$; мы получаем перенормируемую теорию массивной векторной частицы. Ее масса имеет динамическое происхождение: она равна произведению заряда на вакуумное среднее скалярного поля. Полос при $k^2 = 0$ – фиктивный (при учете вклада вектора и скаляра в физических амплитудах он сокращается) – в теории нет безмассовых частиц.

Какова связь перенормируемой калибровки Ландау ($\xi = 0$) с унитарной калибровкой ($\xi = \infty$), в которой ясен набор физических частиц теории? Обратимся вновь к лагранжиану (2.12) с целью найти пропагаторы полей A_μ и φ при произвольном ξ . Последний член приводит к смешиванию A_μ и $\partial_\mu\varphi$; найдем диагональные комбинации полей и их пропагаторы. Самое простое – сделать преобразование (2.6) и подобрать функцию $\Lambda(x)$ так, чтобы в новых переменных φ', A'_μ лагранжиан был диагональным. Удобство преобразования (2.6) в том, что сумма всех членов в (2.12), за исключением члена, фиксирующего калибровку, инвариантна относительно него. С учетом последнего обстоятельства получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}e^2\eta^2 A_\mu^2 - \frac{e\eta A_\mu \partial_\mu\varphi}{2\xi} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi e^2}(\partial_\nu\partial_\nu\Lambda)^2 - \\ & - \frac{1}{\xi e} \partial_\mu A_\mu \partial_\nu\partial_\nu\Lambda, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где мы опустили штрихи у полей A'_μ, φ' . С учетом правила интегрирования по частям мы получаем, что выбор

$$\partial_\nu\partial_\nu\Lambda = \xi e^2\eta\varphi \quad (2.18)$$

ведет к диагонализации лагранжиана. Подставляя (2.18) в (2.17), получим

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}e^2\eta^2 A_\mu^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}\xi e^2\eta^2\varphi^2 \quad (2.19)$$

и для пропагаторов полей A_μ и φ имеем

$$G_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - M^2\xi}}{k^2 - M^2}, \quad G = \frac{1}{k^2 - \xi M^2}, \quad (2.20)$$

где $M = e\eta$. Полученные пропагаторы в литературе называются “пропагаторами в перенормируемых R_ξ -калибровках ’т Хофта”. Это название связано с видоизменением фиксирующего калибровку члена, предложенным ’т Хофтом:

$$\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 \rightarrow \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu + e\eta\xi\varphi)^2, \quad (2.21)$$

используя который в (2.12) мы сразу приходим к лагранжиану (2.19) и пропагаторам (2.20).

Задача 4. Получить пропагаторы фотона (2.11) и массивного векторного бозона (2.20).

Мы видим, что при любом конечном ξ пропагаторы (2.20) падают, как $1/k^2$, т.е. дают перенормируемую теорию. Полюса при $k^2 = \xi M^2$ фиктивные – они сокращаются в амплитудах физических процессов (в матричных элементах S -матрицы). Для древесных амплитуд это сокращение легко увидеть, преобразовав тождественно пропагатор векторного поля:

$$G_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}}{k^2 - M^2} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2(k^2 - \xi M^2)} . \quad (2.22)$$

Второй член в этом выражении сокращается пропагатором поля φ , и зависимость от ξ древесных амплитуд исчезает.¹

При $\xi \rightarrow \infty$ скаляр становится бесконечно тяжелым, и “отщепляется” (дает нулевой вклад); остается массивная векторная частица, описываемая пропагатором Прока. Это унитарная калибровка. При $\xi = 0$ мы получаем калибровку ’т Хофта-Ландау. При $\xi = 1$ – калибровку ’т Хофта-Фейнмана, удобную для петлевых расчетов.

Ключевой является калибровочная инвариантность теории: она дает возможность, проводя вычисления в перенормируемой калибровке, получать амплитуды для физической массивной векторной частицы (унитарная калибровка). Независимость от ξ амплитуд физических процессов во всех порядках теории возмущений в неабелевых калибровочных теориях с хиггсовским механизмом была доказана Велтманом, ’т Хофтом и другими.

¹Петлевые амплитуды перестают зависеть от ξ при учете духов Фаддеева–Попова. Согласно стандартной процедуре для нахождения лагранжиана духов найдем изменение выражения, возводимого в квадрат в (2.21) при калибровочном преобразовании: $\delta[\partial_\mu A_\mu + e\eta\xi\varphi] = 1/e\partial_\mu\partial_\mu\Lambda + e\eta\xi[\eta\Lambda + \rho\Lambda]$. Следовательно, духовый лагранжиан имеет вид: $\mathcal{L}_{ghost} = \bar{c}\partial_\mu\partial_\mu c + \xi M^2\bar{c}c + e\xi M\rho\bar{c}c$. Как обычно, в абелевой калибровочной теории духи не взаимодействуют с калибровочным полем. Однако они взаимодействуют с физическим хиггсовским полем. Их масса совпадает с массой поля φ . В калибровке Ландау $\xi = 0$, духи перестают взаимодействовать с хиггсом и про них можно забыть.

Л Е К Ц И Я 3

Локальная $SU(2)$, лагранжиан векторных полей, хиггсовский сектор, “охранная” симметрия, $SU(2) \otimes U(1)$ теория Глэшоу-Вайнберга-Салама: хиггсовский и калибровочный секторы.

Слабые взаимодействия похожи на квантовую электродинамику: они также обусловлены обменами векторными частицами. Отличие в том, что наряду с диагональными слабыми взаимодействиями, обусловленными обменом Z -бозоном (и открытыми сравнительно недавно), имеются традиционные недиагональные слабые взаимодействия, обусловленные обменом W^\pm -бозонами. Поэтому в основе модели Глэшоу-Вайнберга-Салама лежит не абелева $U(1)$ -симметрия, а (простейшая) неабелева симметрия $SU(2)$ (полная симметрия модели $SU(2) \otimes U(1)$; фотон является четвертым векторным бозоном, и теория описывает наряду со слабыми взаимодействиями электродинамику).

У группы $SU(2)$ (унитарные матрицы 2×2 с равным единице детерминантом) имеются три генератора T_i , традиционно выбираемые в спинорном представлении в следующем виде:

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{tr} T_i^2 = \frac{1}{2}; \quad (3.1)$$

$$[T_i T_k] = i \epsilon_{ikl} T_l; \quad T_i T_k = \frac{1}{4} \delta_{ik} + \frac{i}{2} \epsilon_{ikl} T_l. \quad (3.2)$$

Произвольное $SU(2)$ -преобразование характеризуется тремя параметрами $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \equiv \bar{\Lambda}$, которые в случае локальной симметрии различны в различных точках пространства-времени, $\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}(x)$, и имеет следующий вид:

$$\Psi(x) = S \Psi'(x), \quad S = e^{i \bar{\Lambda}(x) T}, \quad (3.3)$$

где $\Psi(x)$ – комплексный спинор. Эрмитовость генераторов приводит к унитарности S , $S^+ S = 1$. Пусть поле $\Psi(x)$ описывает частицу с лоренцевским спином $1/2$. Из требования инвариантности кинетического члена спинорного поля относительно локальных $SU(2)$ -преобразований получим закон $SU(2)$ -преобразования триплета векторных полей A_μ^i :

$$\bar{\Psi}(\partial_\mu - ig A_\mu) \Psi = \bar{\Psi}'(\partial_\mu - ig A'_\mu) \Psi', \quad \text{где } A_\mu \equiv A_\mu^i T^i. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) в (3.4), получим

$$-ig A_\mu = S \partial_\mu S^+ - ig S A'_\mu S^+ \quad (3.5)$$

и, окончательно:

$$A'_\mu = S^+ A_\mu S - \frac{i}{g} (\partial_\mu S^+) S. \quad (3.6)$$

Этот закон преобразования демонстрирует двойную роль неабелевых полей A_μ : первый член отвечает преобразованию полей, находящихся в присоединенном представлении $SU(2)$; второй же неоднородный член аналогичен случаю фотонного поля и характеризует A_μ как калибровочное поле.

Для построения кинетического члена следует начать с тензора поля. В абелевом случае тензор электромагнитного поля строится из коммутатора ковариантных производных следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \frac{i}{g}[\partial_\mu - igA_\mu, \partial_\nu - igA_\nu] = \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{КЭД}) \quad , \end{aligned} \quad (3.7)$$

допускающим обобщение на неабелев случай:

$$G_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (\text{Я-М}) \quad . \quad (3.8)$$

В отличие от $F_{\mu\nu}$ тензор $G_{\mu\nu}$ не инвариантен относительно калибровочных преобразований. С помощью (3.6) находим

$$G'_{\mu\nu} = S^+ G_{\mu\nu} S \quad , \quad (3.9)$$

т.е. неоднородный член в преобразовании A_μ сокращается. Это дает возможность немедленно написать $SU(2)$ -инвариантный кинетический член

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Tr(G_{\mu\nu}^2) \quad , \quad (3.10)$$

где коэффициент $1/2$ связан с нормировкой матриц T_i . В отличие от КЭД неабелева симметрия определяет самодействие векторных полей; лагранжиан (3.10) содержит кубичные и квадратичные члены. Теория безмассовых полей Янга-Миллса является перенормируемой - в частности, такая теория, основанная на группе $SU(3)$, описывает взаимодействие глюонов. Добавляя массовый член векторных полей в (3.10) и вычисляя древесные амплитуды рассеяния мы увидим, что в случае продольной поляризации векторных частиц они растут с энергией - теория перенормируема. Глобальная неабелева симметрия приводит к сохранению токов, что понижает показатель степени энергии на две единицы согласно (1.18), но недопустимый в перенормируемых теориях рост с энергией не устраняется. Требованию перенормируемости удовлетворяет только локально инвариантный лагранжиан.

Перейдем к спонтанному нарушению $SU(2)$ -симметрии. Введем скалярный дублет $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ и рассмотрим следующий лагранжиан:

$$\mathcal{L} = |D_\mu \varphi|^2 - \frac{1}{2}\lambda^2[\varphi^+ \varphi - \eta^2/2]^2 - \frac{1}{2}Tr G_{\mu\nu}^2 \quad . \quad (3.11)$$

В первой лекции было установлено, что в отсутствие векторных полей в данной теории происходит спонтанное нарушение симметрии и возникают три голдстоуновских бозона. Смешиваясь с векторными полями, они дают им массу. Физический состав теории проще всего виден в унитарной калибровке, где из четырех вещественных компонент комплексного дублета φ остается одно поле хиггсовского бозона:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta + \chi(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

где мы выбрали вакуумное среднее φ вещественным и направленным вдоль φ_2 . Подставляя (3.12) в (3.11), для массовых членов векторных полей получим

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^2\eta^2\frac{1}{4}\left((A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2 + (A_\mu^3)^2\right), \quad M_{A^1} = M_{A^2} = M_{A^3} = \frac{g\eta}{2}. \quad (3.13)$$

В теории не осталось безмассовых полей: имеются три векторных бозона с равными массами и хиггсовский бозон χ , масса которого определяется константой λ .

Фиксация калибровки требует введения духов Фаддеева-Попова, взаимодействующих с векторными и скалярными полями. Духовые поля впервые проявляются при вычислении петель, поэтому мы не будем ими заниматься.

У нас, наконец, имеются все заготовки для рассмотрения теории Глэшоу-Вайнберга-Салама; однако отвлечемся в сторону и обсудим, почему в рассмотренном примере массы всех трех векторных бозонов оказались равными. Какая симметрия гарантирует это равенство? Если бы хиггсовский мультиплет находился в присоединенном представлении $SU(2)$ (трехмерный вектор), то в вакууме $\langle \varphi \rangle = (0, 0, \eta/\sqrt{2})$ происходило бы нарушение $SU(2)$ до $O(2)$ (вращение вдоль третьей оси), и два массивных векторных бозона с равными массами $M_{A_1} = M_{A_2}$ образуют представление оставшейся ненарушенной группы $O(2)$: одно комплексное поле эквивалентно двум вещественным. Инвариантное относительно $O(2)$ поле A_3 остается безмассовым.

Что же происходит в случае спинорного представления? Модель (3.11) должна обладать более высокой симметрией, чем обсуждавшаяся $SU(2)$. Тогда спектр векторных бозонов (3.13) имел бы естественное объяснение. Наличие дополнительной $U(1)$ видно сразу: лагранжиан (3.11) инвариантен относительно (локальной) $SU(2) \otimes$ (глобальной) $U(1)$; последняя сводится к умножению поля φ на фазу. Вакуумное состояние (3.12) не разрушает симметрию полностью: одна комбинация T_3 и $U(1)$ генераторов домножает на фазу только нижнюю компоненту изоспинора (3.12) и является нарушенной; другая – только верхнюю компоненту, и она не нарушена. Оставшаяся группа $U(1)$ не имеет трехмерных представлений и не объясняет вырождения (3.13). Природа вырождения становится понятной, если от изоспинора φ перейти к представлению скалярных полей в виде матрицы 2×2 : $\Phi = (\tilde{\varphi}, \varphi)$, где $\tilde{\varphi} = i\sigma_2\varphi^*$, $\sigma_2 \equiv 2T_2$ – матрица Паули. Записанный в терминах поля Φ лагранжиан (3.11) имеет глобальную $SU(2)_L \times SU(2)_R$ симметрию

относительно $SU(2)$ вращений, действующих на матрицу Φ слева и справа: $\Phi = S_L^+ \Phi' S_R$. Из этих двух симметрий $SU(2)_L$ реализуется локально введением триплета векторных полей A_μ ($A_\mu = S_L^+ A'_\mu S_L$). Вакуумное среднее Φ

$$\langle \Phi \rangle = \eta/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

нарушает каждую из двух $SU(2)$, однако инвариантно относительно диагональной подгруппы $SU(2)_{L+R}$ – совпадающих левых и правых вращений – $S^+1S = 1$. Три поля A_μ , образуя присоединенное представление $SU(2)_{L+R}$, остаются вырожденными после спонтанного нарушения симметрии $SU(2)_L$ (Волошин, Заскинд, Захаров, Сикиви).

Электрослабая теория Глэшоу-Вайнберга-Салама основана на локальной симметрии $SU(2)_L \otimes U(1)$ (здесь значок L означает, что преобразования $SU(2)$ действуют только на левые частицы со спином $1/2$, см. ниже). В этой лекции мы рассмотрим бозонный сектор теории. Четырём генераторам отвечают три калибровочных поля A_μ^i и поле гиперзаряда B_μ . Ковариантная производная имеет следующий вид:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^i T^i - ig'B_\mu \frac{Y}{2} , \quad (3.15)$$

где g – заряд $SU(2)$, g' – заряд $U(1)$. Абелев заряд может отличаться для различных полей (в отличие от неабелева, фиксированного нелинейностью коммутационных соотношений). Эта возможность отражена введением гиперзаряда Y .

Скалярный сектор теории образует изодублет хиггсовских полей $H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}$, имеющий знакомый нам лагранжиан:

$$\mathcal{L}_H = |(\partial_\mu - igA_\mu^i T^i - ig'B_\mu \frac{Y}{2})H|^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 [H^+ H - \frac{\eta^2}{2}]^2 . \quad (3.16)$$

Перейдем в унитарную калибровку и разложим скалярное поле относительно его вакуумного среднего:

$$H = e^{i\bar{\alpha}(x)\bar{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \rho(x)) \end{pmatrix} , \quad \langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta/\sqrt{2} \end{pmatrix} . \quad (3.17)$$

Единственное физическое скалярное поле в теории – бозон Хиггса $\rho(x)$; его масса

$$M_H = \lambda\eta \quad (3.18)$$

и определяется величиной неизвестной константы λ . Отрицательный результат поиска распада $Z \rightarrow Z^* H \rightarrow l^+ l^- H$, где l – заряженный лептон, на ускорителе LEP I в CERN дало ограничение снизу на массу бозона Хиггса $M_H > 65$ ГэВ. На ускорителе LEP II бозон Хиггса не был обнаружен в реакции $e^+ e^- \rightarrow Z^* \rightarrow ZH$ при энергии $\sqrt{s} = 210$

ГэВ, что подняло нижнее ограничение на его массу до $M_H > 114$ ГэВ. Для поиска более тяжелого бозона Хиггса в CERN построен ускоритель LHC. Роль хиггсовского бозона в современной физике исключительна: массы лептонов, кварков и промежуточных бозонов дает механизм Хиггса. Его обнаружение, в основном, завершит изучение Стандартной Модели (СМ).

Перейдем к векторным частицам. Лагранжиан дается суммой кинетических членов для $SU(2)$ -триплета A_μ^i (3.10) и $U(1)$ -поля B_μ и массовыми членами, получаемыми из (3.16) подстановкой вакуумного среднего поля H . Займемся последними:

$$\left| \begin{pmatrix} \sim & -ig \frac{A_1 - iA_2}{2} \\ \sim & ig \frac{A_3}{2} - \frac{ig'B}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{g\eta}{2} \frac{A_1 - iA_2}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left[\frac{\bar{g}\eta}{2\sqrt{2}} \frac{gA_3 - g'B}{\bar{g}} \right]^2, \quad \bar{g} = \sqrt{g^2 + g'^2}, \quad (3.19)$$

где мы положили гиперзаряд дублета H равным единице (это условие определяет нормировку g'). Первый член дает равные массы полям A_1 и A_2 . Так как в переходах между компонентами изомультиплета излучается когерентная суперпозиция $\frac{A_1 - iA_2}{\sqrt{2}} \equiv W^+$, то это и есть заряженный W -бозон. Массивная нейтральная частица – Z -бозон. Ортогональную ей суперпозицию, остающуюся безмассовой, естественно отождествить с фотоном. Итак:

$$W^\pm = \frac{A_1 \mp iA_2}{\sqrt{2}}, \quad M_W = \frac{g\eta}{2}; \quad (3.20)$$

$$Z = \frac{gA_3 - g'B}{\bar{g}}, \quad M_Z = \frac{\bar{g}\eta}{2}; \quad (3.21)$$

$$\gamma = \frac{g'A_3 + gB}{\bar{g}}, \quad M_\gamma = 0. \quad (3.22)$$

Физические поля γ и Z развернуты относительно затравочных полей A_3 и B на электро-слабый угол смешивания θ_W , $\sin \theta_W = g'/\bar{g}$, $\cos \theta_W = g/\bar{g}$. То, что в $SU(2) \otimes U(1)$ -теории с одним дублетом хиггсовских полей остается один безмассовый векторный бозон, можно было предвидеть: вакуум (3.17) инвариантен относительно комбинации T_3 и $U(1)$ -вращений; трем же нарушенным преобразованиям симметрии отвечают три массивных векторных бозона: W^\pm и Z .

Взаимодействие фотона определяется формулами (3.22) и (3.15):

$$\gamma : \frac{g'g}{\bar{g}} T_3 + \frac{gg'Y}{\bar{g}2} = \frac{gg'}{\bar{g}} \left(T_3 + \frac{Y}{2} \right). \quad (3.23)$$

В один изодублет объединяются нейтральное электронное нейтрино и электрон; изменению заряда на единицу отвечает изменение третьей проекции изоспина T_3 . Отсюда имеем

$$\frac{gg'}{\bar{g}} = e \equiv \sqrt{4\pi\alpha}, \quad Q = T_3 + \frac{Y}{2}. \quad (3.24)$$

Знание экспериментальных значений масс W - и Z -бозонов и постоянной тонкой структуры α позволяет определить значения параметров $SU(2)_L \times U(1)$ -теории. Правило определения гиперзаряда изомультиплета следует из формулы для оператора электрического заряда Q . Гиперзаряд всех членов одного изомультиплета одинаков ($SU(2)_L$ и $U(1)$ коммутируют), а сумма третьих компонент изоспина равна нулю:

$$Y = 2 \frac{\Sigma Q}{n} , \quad (3.25)$$

или гиперзаряд равен удвоенному среднему электрическому заряду членов изомультиплета.

Взаимодействие Z -бозона фиксируется формулами (3.21) и (3.15):

$$Z : \frac{g^2}{\bar{g}} T_3 - \frac{g'^2}{\bar{g}} \frac{Y}{2} = \bar{g} T_3 - \frac{g'^2}{\bar{g}} Q = \bar{g} \left(T_3 - \frac{g'^2}{\bar{g}^2} Q \right) , \quad (3.26)$$

т.е. заряд нейтрального слабого тока равен \bar{g} , а оператор заряда равен $T_3 - \sin^2 \theta_W Q$.

Приведем экспериментально измеренные значения масс промежуточных бозонов:

$$M_W = 80.398 \pm 0.025 \text{ ГэВ} , \quad M_Z = 91.188 \pm 0.002 \text{ ГэВ} . \quad (3.27)$$

Их близость объясняется охранной симметрией; точное равенство $M_W = M_Z$ нарушается отличным от нуля гиперзарядом: поля H и \tilde{H} имеют противоположные гиперзаряды, и поэтому гиперзаряд Φ не определен.

Л Е К Ц И Я 4

Левые и правые фермионы, слабые взаимодействия лептонов и кварков, фермиевская константа G_μ , определение параметров $SU(2)_L \times U(1)$ -модели, нейтральные токи, треугольные аномалии: кварк-лептонная симметрия, нейтральность атома водорода и нейтрино в СМ.

Одним из наиболее удивительных открытий в физике было открытие несохранения P -четности в слабых взаимодействиях. В работе 1956 года Ли и Янг выдвинули гипотезу, разрешающую $\theta - \tau$ проблему в распадах заряженных K -мезонов несохранением P -четности в слабых взаимодействиях.

Как известно из курса квантовой электродинамики, волновая функция электрона является биспинором, реализующим представление группы Лоренца. У биспинора имеются четыре комплексные компоненты. Неприводимое представление группы Лоренца реализуется на спиноре, имеющем две комплексные компоненты и называемомся вейлевским (Г.Вейль). Биспинор состоит из двух спиноров. Теория вейлевских спиноров автоматически приводит к максимальному нарушению P -четности, наблюдаемому на эксперименте.

Мы будем использовать стандартное представление матриц Дирака γ :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\sigma_i = 2T_i, \quad \gamma_\mu\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_\mu.$$

Определим проектор на левое состояние P_L :

$$P_L = \frac{1 + \gamma_5}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_L^2 = P_L, \quad (4.2)$$

и подействуем им на дираковский биспинор Ψ :

$$\frac{1 + \gamma_5}{2}\Psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi - \chi \\ -\varphi + \chi \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Из дираковского биспинора мы получили собственное состояние оператора P_L – левый спинор, или состояние с определенной (левой) киральностью, или вейлевский спинор. На массовой оболочке из уравнения Дирака получим

$$(\hat{p} - m)\Psi = 0, \quad \begin{pmatrix} E - m & -\bar{p}\bar{\sigma} \\ \bar{p}\bar{\sigma} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \quad (4.4)$$

$$\bar{p}\bar{\sigma}\varphi = (E + m)\chi, \quad \chi = \frac{\bar{p}\bar{\sigma}}{E + m}\varphi,$$

следовательно, для левого вейлевского спинора имеем

$$\varphi - \chi = \left(1 - \frac{\bar{p}\bar{\sigma}}{E + m}\right)\varphi . \quad (4.5)$$

В пределе высоких энергий (или для безмассовой частицы) киральные состояния становятся диагональными:

$$\begin{aligned} (E - \bar{p}\bar{\sigma})(\varphi - \chi) &= m(\varphi + \chi) , \\ (E - \bar{p}\bar{\sigma})(\varphi + \chi) &= m(\varphi - \chi) , \end{aligned}$$

и имеют простую физическую интерпретацию:

$$1 - \frac{\bar{p}\bar{\sigma}}{E} = 1 - \bar{n}\bar{\sigma} , \quad (4.6)$$

т.е. левая частица поляризована против направления своего импульса. Правый спинор выделяется из биспинора проектором $P_R = \frac{1-\gamma_5}{2}$. Аналогично получим, что правая частица поляризована по импульсу. При инверсии координат $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ левый спинор переходит в правый, а правый – в левый. Промежуточный W -бозон взаимодействует с левыми частицами, что и объясняет нарушение P -четности в слабых распадах частиц (или наоборот). Примесь направленной вдоль импульса поляризации в волновой функции левой частицы подавлена как m/E . Волновая функция позитрона (μ^+ , ...) описывается зарядово-сопряженным биспинором $\psi^c = C\bar{\psi}$, ($C = \gamma_0\gamma_2$), поэтому наряду с левыми частицами в слабом взаимодействии участвуют правые античастицы. Это означает, что в слабых взаимодействиях нарушается и C -четность (Июффе, Окунь, Рудик; Ли, Оме, Янг, 1957): античастица левой частицы есть левая античастица, не взаимодействующая с W^\pm . Произведение P и C , преобразование CP , переводит левую частицу в правую античастицу, что позволяло до 1964 года надеяться на CP -инвариантность слабого взаимодействия (гипотеза комбинированной четности, сформулированная Л.Д. Ландау в 1957 году). Нарушение CP было обнаружено в распадах нейтральных каонов.

В минимальной СМ имеется 3 поколения (или семейства) фермионов: (u, d, ν_e, e) , (c, s, ν_μ, μ) и (t, b, ν_τ, τ) . $SU(2)_L \otimes U(1)$ взаимодействия поколений одинаковы, поэтому рассмотрим только первое поколение. Входящие в него частицы описываются пятнадцатью вейлевскими спинорами: $(u_L)^i, (u_R)^i, (d_L)^i, (d_R)^i, \nu_{eL}, e_L$ и e_R , где $i = 1, 2, 3$ – цветовой индекс. Цветовая симметрия – это группа сильных взаимодействий $SU(3)_c$. Стандартная Модель – это калибровочная $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)$ теория взаимодействия трех семейств фермионов, включающая один дублет хиггсов. Так как цветовая группа коммутирует с электрослабой, электрослабые взаимодействия кварков не зависят от их цвета, и цветовой индекс в дальнейшем мы будем опускать.

Левые лептоны и кварки образуют дублеты по $SU(2)_L$, правые – синглеты:

$$L \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L , \quad e_R, \quad Q_L \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L , \quad u_R, \quad d_R . \quad (4.7)$$

Так же, как и для векторных частиц, первичными являются безмассовые поля, описываемые в случае спина 1/2 вейлевскими спинорами. Нарушение Р-четности в распадах заряженных K -мезонов привело в 1957 году Ландау (а также Ли и Янга и независимо Салама) к построению слабых взаимодействий с вейлевским нейтрино (тогда, как и много позже, нейтрино считалось безмассовой частицей).

Выпишем кинетический член для полей лептонов

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} = & i\bar{L}(\hat{\partial} - ig\vec{T}\vec{A} - ig'\frac{Y_L}{2}\hat{B})L + \\ & + i\bar{e}_R(\hat{\partial} - ig'\frac{Y_{eR}}{2}\hat{B})e_R , \end{aligned} \quad (4.8)$$

и займемся заряженными токами. Член в лагранжиане, отвечающий переходу $W^+e^- \rightarrow \nu_e$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} = & \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_{eL}\hat{W}^+e_L \\ = & \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_e\gamma_\alpha\frac{1+\gamma_5}{2}eW_\alpha^+ . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для амплитуды распада мюона, описываемой диаграммой рис. 1.2, в модели ГВС получим

$$M_{\mu\rightarrow e\nu\bar{\nu}}^{\text{ГВС}} = \frac{g^2}{2 \cdot 4 \cdot M_W^2}\bar{\nu}_\mu\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\mu\bar{e}\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\nu_e , \quad (4.10)$$

где мы пренебрегли членами порядка $q^2/M_W^2 \sim m_\mu^2/M_W^2$ в пропагаторе W -бозона. В 4-фермионной теории эта же амплитуда дается следующим выражением:

$$M_{\mu\rightarrow e\nu\bar{\nu}}^{4\text{-}\Phi} = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_\mu\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\mu\bar{e}\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\nu_e . \quad (4.11)$$

Сравнивая (4.10) и (4.11), получим выражение для константы Ферми в модели ГВС:

$$\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} . \quad (4.12)$$

Для определения численных значений трех параметров электрослабой модели η , g и \bar{g} (или g') с лучшей точностью следует взять три выражающихся через них величины, измеренные с наилучшей точностью. На сегодняшний день это постоянная тонкой структуры α , фермиевская константа из распада μ -мезона G_μ и масса Z -бозона:

$$\alpha^{-1} = 137.035985(61) , \quad G_\mu = 1.16639(2) \cdot 10^{-5}\text{ГэВ}^{-2} , \quad M_Z = 91.188(2)\text{ГэВ} . \quad (4.13)$$

Подставляя в (4.12) выражение для массы W -бозона (3.20), получим

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}G_\mu}} = 246 \text{ ГэВ} . \quad (4.14)$$

Используя (3.24), выражение для M_Z (3.21) и выражение для η , получим

$$\sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W = \frac{4\pi\alpha\eta^2}{4M_Z^2} = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2} = 0.1671 \quad , \quad (4.15)$$

$$\sin^2 \theta_W = 0.212 \quad . \quad (4.16)$$

Используем полученные формулы для нахождения массы W -бозона:

$$M_W^{\text{теор}} = \cos \theta_W M_Z = 80.94 \text{ ГэВ} \quad , \quad (4.17)$$

что следует сравнить с экспериментальным результатом

$$M_W^{\text{эксп}} = 80.40(3) \text{ ГэВ} \quad , \quad (4.18)$$

где 30 МэВ – ошибка эксперимента.

Расхождение около 20 стандартных отклонений и составляет 0.7% от величины массы. Учет радиационных поправок устраняет противоречие (см. лекцию 10).

Приведем численные значения зарядов электрослабой теории:

$$\bar{g} = \frac{2M_Z}{\eta} = 0.74 \quad , \quad g = \frac{\sqrt{4\pi\alpha}}{\sin \theta_W} = \frac{0.30}{\sin \theta_W} = 0.66 \quad , \quad (4.19)$$

$$g' = \frac{\sqrt{4\pi\alpha}}{\cos \theta_W} = 0.34$$

В пределе малых энергий обмен W -бозоном приводит к локальному взаимодействию заряженных токов, обуславливающему распады частиц. $SU(2)_L \times U(1)$ модель предсказала существование также нейтральных слабых токов за счет обмена Z -бозоном. Обнаружение нейтральных слабых токов с параметрами, предсказанными моделью ГВС, доказало верность этой модели и дало первое измерение электрослабого угла смешивания. Знание угла смешивания позволило предсказать массы W - и Z -бозонов ($M_W^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu \sin^2 \theta_W}$, $M_Z^2 = M_W^2 / \cos^2 \theta_W$), что существенно способствовало их экспериментальному наблюдению.

Следующий вопрос – как в модели ГВС возникают массы лептонов и кварков. Дело в том, что массовый член электрона

$$m_e \bar{e}e = m_e (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \quad (4.20)$$

нарушает $SU(2)_L$ симметрию, и поэтому его добавление к электрослабому лагранжиану разрушит перенормируемость теории. Ввести массы фермионов $SU(2)_L \times U(1)$ инвариантным образом позволяет дублет Хиггса:

$$\Delta \mathcal{L}_{m_e} = f_e \bar{L}_e H + \text{к.с.} \quad , \quad (4.21)$$

где к.с. означает комплексно сопряженное выражение, добавляемое для эрмитовости лагранжиана. В унитарной калибровке получим

$$\Delta\mathcal{L}_{m_e} = \frac{f_e}{\sqrt{2}}(\eta + \rho)\bar{e}e, \quad f_e = \frac{\sqrt{2}m_e}{\eta} \approx 3 \cdot 10^{-6} \quad (4.22)$$

Аналогичные формулы справедливы для мюона и тау-лептона. Мы видим, что взаимодействие хиггсовского бозона с фермионами пропорционально массе последних. Поэтому, в частности, вероятность распада $H \rightarrow \tau\bar{\tau}$ в 10^7 раз больше, чем вероятность распада $H \rightarrow \bar{e}e$. Электрон Дирака является суперпозицией двух полей e_L и e_R , совершенно различных с точки зрения электрослабой теории. Эти поля объединяет в одну частицу взаимодействие (4.21).

Вопрос генерации масс нейтрино отложим до седьмой лекции и перейдем к кваркам. Кинетический член для дублета Q_L и синглетов u_R и d_R выписывается так же, как и для лептонов (ф-ла (4.8)), поэтому сразу перейдем к массам.

Массовый член d -кварка строится аналогично электронному, ф-ла (4.21), с очевидной заменой f_e на f_d . Для генерации массы u -кварка в МСМ используется комплексно сопряженный дублет хиггсов (используется специфичная для $SU(2)$ возможность образовывать скаляр как из произведения дублета на антидублет, так и из двух дублетов):

$$\Delta\mathcal{L}_{m_u} = f_u\bar{Q}_L u_R(-i\sigma_2)H^* + \text{к.с.} \quad (4.23)$$

Таким образом, одного дублета хиггсов хватает для генерации масс лептонов и кварков. Итак, кварки, лептоны и калибровочные бозоны получают массы за счет механизма Хиггса. Может показаться, что все массы имеют хиггсово происхождение. Но это не так. В пределе безмассовых кварков безмассовыми становятся также псевдоскалярные мезоны, большинство же адронов (протон, нейтрон, ρ -мезон и т.д.) остаются массивными. Происхождение их масс – квантовохромодинамический эффект, связанный с ростом сильного заряда на больших расстояниях. При этом параметр с размерностью массы $\Lambda_{\text{КХД}}$ отсутствует в лагранжиане КХД и возникает в ходе перенормировки. Вместе с тем, массы адронов, имеющих в своем составе тяжелые кварки (J/Ψ -, D -, Υ -, B -мезоны и т.д.), в основном имеют хиггсово происхождение.

Наличие трех поколений фермионов вносит в описанную картину существенные поправки. Вместо двух чисел f_u и f_d вводятся две 3×3 матрицы юкавских констант связи:

$$\Delta\mathcal{L}_{m_q} = f_d^{ik}\bar{Q}'_{Li}d'_{Rk}H + f_u^{ik}\bar{Q}'_{Li}u'_{Rk}(-i\sigma_2)H^* + \text{к.с.} \implies \quad (4.24)$$

$$\implies \bar{u}'_{Li}M_u^{ik}u'_{Rk} + \bar{d}'_{Li}M_d^{ik}d'_{Rk} + \text{к.с.} \quad , \quad (4.25)$$

где мы подставили вакуумное среднее поля Хиггса. Видно, что первичные поля u - и d -кварков не имеют определенных масс, и поэтому мы их обозначили штрихами. Согласно теореме линейной алгебры аналогично тому, как любое комплексное число представимо

в виде произведения модуля на фазу, любая невырожденная матрица M представима в виде произведения эрмитовой матрицы на унитарную. Представив матрицы M_u и M_d в таком виде, мы увидим, что для их диагонализации необходимы две пары унитарных матриц:

$$M_u = U_L^+ M_u^{diag} U_R, \quad M_D = D_L^+ M_d^{diag} D_R. \quad (4.26)$$

Если бы матрицы M были эрмитовы, то для их диагонализации было бы достаточно одной унитарной матрицы и выполнялись бы равенства $U_L = U_R$, $D_L = D_R$.

Подставляя полученные представления матриц M в (4.24), получим связь диагональных кварковых полей с первичными:

$$u_R = U_R u'_R \quad u_L = U_L u'_L \quad (4.27)$$

$$d_R = D_R d'_R \quad d_L = D_L d'_L.$$

Поля $u = u_L + u_R$ и $d = d_L + d_R$ имеют определенные массы; одновременно с массовыми членами диагонализуются и связь кварков с физическим бозоном Хиггса. В случае нескольких дублетов Хиггса связь полей кварков со скалярными частицами недиагональна; возникают недиагональные переходы с испусканием скалярных частиц.

В удлинённых кинетических энергиях кварковых полей есть два типа членов: диагональные (производные $\hat{\partial}$ и испускание векторных полей \hat{B} и \hat{A}_3) и недиагональные (испускание заряженных W -бозонов). При переходе к обладающим определенными массами полям в силу унитарности матриц $U_{L,R}$ и $D_{L,R}$ из членов первого типа они выпадают (нейтральные токи диагональны), оставаясь в излучении W :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= \bar{u}'_{Li} \gamma_\mu d'_{Li} W_\mu = \bar{u}_L U_L D_L^+ \gamma_\mu d_L W_\mu \equiv \\ &\equiv \bar{u}_L K \gamma_\mu d_L W_\mu, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где $K = U_L D_L^+$ – унитарная матрица, называемая матрицей Кабиббо-Кобаяши-Маскава. Недиагональность заряженного тока по индексу кварковых поколений известна давно: ток $\bar{u} \gamma_\mu d$ ведет к распаду π^\pm -мезонов, а ток $\bar{u} \gamma_\mu s$ – к распаду K -мезонов. Унитарная матрица параметризуется (вещественными) углами и (комплексными) фазами. В случае двух поколений имеется один угол – это знаменитый угол Кабиббо. В случае трех поколений имеется 3 угла (число углов унитарной матрицы такое же, как у ортогональной и равно $\frac{n(n-1)}{2}$ для матрицы $n \times n$). Среди фаз часть ненаблюдаема, так как $2n - 1$ фаза может быть убрана $U(1)$ -вращениями полей верхних и нижних кварков (вращение всех верхних кварков на одну и ту же фазу умножает на нее все элементы матрицы K точно так же, как и вращение на противоположную фазу всех нижних кварков – отсюда -1). Вычитая из общего числа параметров унитарной матрицы (n^2 параметров) число

углов и ненаблюдаемых фаз, получим число наблюдаемых фаз $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, т.е. впервые комплексность появляется для трех поколений кварков и является единственным источником CP-нарушения в СМ. Определение численных значений параметров матрицы Кобаяши-Маскава требует анализа слабых распадов b -кварка, которыми в этой части курса мы заниматься не будем.

В этой и предыдущей лекциях мы полностью описали лагранжиан электрослабой теории. В следующей лекции будут рассмотрены свойства W - и Z -бозонов – очевидное приложение модели ГВС, а сейчас обсудим ряд более общих вопросов, которые возникают при внимательном рассмотрении описанной теории.

Наиболее изящная часть модели – калибровочный сектор, и здесь имеется следующий вопрос: с чем связано появление двух зарядов, g и g' ? Нельзя ли как-то связать их друг с другом, уменьшив тем самым число фундаментальных параметров теории? На этот вопрос положительный ответ дают теории Великого Объединения, в которых три калибровочных заряда СМ (третий – цветовой заряд g_3) возникают из одного фундаментального заряда, описывающего взаимодействия на очень маленьких расстояниях порядка 10^{-30} см (подробнее см. лекцию 11).

Хиггсовский сектор, наоборот, наиболее уязвимая часть модели. Почему выбран только один дублет, а не два или больше? Масса бозона Хиггса – произвольный параметр теории. Взаимодействия дублета хиггсов с лептонами и кварками описываются 13-ю наблюдаемыми параметрами (массы заряженных лептонов и кварков и параметры матрицы Кобаяши-Маскава). Таким образом, большинство фундаментальных параметров связано с хиггсом. Наконец, последний по очереди, но не по важности вопрос: почему перенормировка массового члена скалярного поля, пропорциональная квадрату ультрафиолетового обрезания Λ , не "уводит" шкалу слабых взаимодействий на сверхвысокие энергии (порядка шкалы Великого Объединения $M_{GUT} \sim 10^{15}$ ГэВ или массы Планка $M_P = 10^{19}$ ГэВ) – так называемая проблема натуральности. Ответ на последний вопрос дают суперсимметричные теории (см. лекции 12, 13). Большое количество параметров во взаимодействии бозона Хиггса с фермионами обусловлено наличием трех кварк-лептонных поколений. Иерархия масс и количество поколений может найти объяснение в теориях горизонтальной симметрии (вертикаль – электрослабые и сильные взаимодействия одного поколения; горизонталь – новые взаимодействия с изменением флэйвора).

Наконец, приведем вопросы, на которые будет дан ответ в этой лекции: почему семейств лептонов столько же, сколько и семейств кварков? Почему атом водорода нейтрален ($Q_e = -Q_p$)? Почему нейтрален нейтрон? Почему нейтрино не имеет электрического заряда?

Причина кварк-лептонной симметрии – в необходимости иметь перенормируемую теорию. Как уже было сказано, $SU(2)_L \times U(1)$ -симметричные кинетические члены квар-

ков и лептонов выписываются независимо. Это относится также и к взаимодействиям с бозоном Хиггса, дающим массы фермионов. Тем не менее, электрослабая теория одних лептонов (или кварков) неперенормируема, и причина этого – в знаменитой треугольной аномалии. Начнем с обычной квантовой электродинамики и устремим массу электрона к нулю. В этом пределе в теории появляется сохраняющийся аксиальный ток $J_\mu^5 = \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi$, $\partial_\mu J_\mu^5 = 0$, отвечающий глобальной аксиальной симметрии: $\Psi(x) = e^{i\Lambda\gamma_5}\Psi'(x)$. Учет показанных на рис. 4.1 диаграмм приводит к несохранению аксиального тока: $\partial_\mu J_\mu^5 \sim \alpha\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \equiv \alpha F\tilde{F}$; соответствующая аксиальная симметрия лагранжиана нарушена петлевыми поправками.

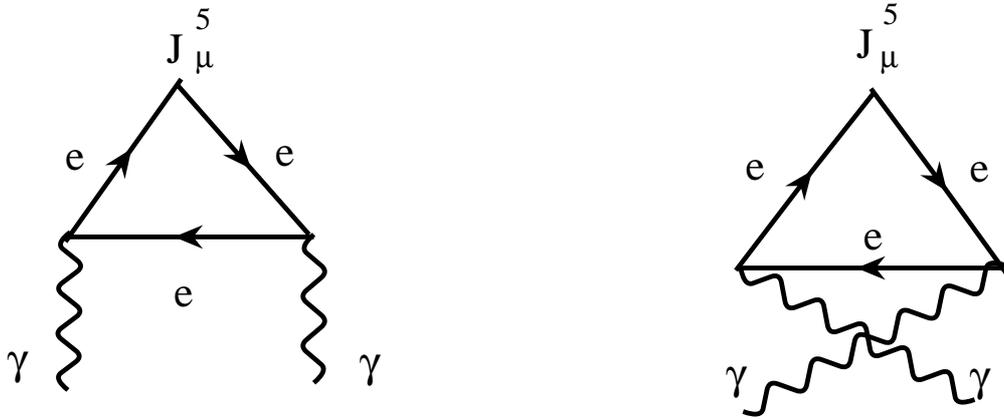


Рис. 4.1 Диаграммы, приводящие к несохранению аксиального тока в квантовой электродинамике с безмассовым электроном.

Дело в том, что доказательство сохранения тока требует сдвига импульса интегрирования, отвечающего петлевой диаграмме. Ультрафиолетовая расходимость интеграла не позволяет сделать сдвиг переменной интегрирования – возникает аномалия в дивергенции аксиального тока. Описываемое явление было открыто в 50-х годах Швингером, а в 60-х – переоткрыто Адлером и Беллом и Джакивом.

К электрослабой теории аксиальная аномалия имеет непосредственное отношение: теория формулируется отдельно для левых и правых спиноров; векторные бозоны взаимодействуют как с векторными, так и с аксиальными токами. Если эти токи перестанут сохраняться при учете петлевых диаграмм, то обеспечивающая перенормируемость теории слабых взаимодействий локальная $SU(2)_L \times U(1)$ симметрия окажется разрушенной.

В случае модели ГВС аномальные треугольные диаграммы с распространяющимися по внутренним линиям лептонами сокращаются с кварковыми треугольниками.

Теория остается перенормируемой благодаря кварк-лептонной симметрии. Принципиальная возможность компенсации реализуется при определенных соотношениях между зарядами кварков и лептонов. Получим соответствующие уравнения. Удобно рассматривать треугольные диаграммы, в которых фермионы в петле взаимодействуют с затравочными внешними полями: $SU(2)$ триплетом A_μ^i и полем гиперзаряда B_μ . Имеем три типа треугольных диаграмм: B^3 , A^{i3} и BA^{i2} , в которых к вершинам подходят три поля B_μ , три поля A_μ^i и B_μ переходит в два A_μ^i , соответственно. (Треугольник B^2A^i зануляется в силу $SU(2)$ -симметрии.) Начнем с треугольников, к вершинам которых подходят три поля A^i . В каждой вершине стоит генератор $SU(2)$ – матрица T_i . Суммирование диаграмм рис. 4.1a) и b) приводит к следующему изотопическому множителю: $SpT^iT^kT^l + SpT^iT^lT^k \equiv SpT^i\{T^kT^l\}$. Антиккоммутатор двух матриц T пропорционален δ_{kl} , а шпур матриц T_i равен нулю. Таким образом, в чистой $SU(2)$ -теории треугольные аномалии не возникают. (В группах $SU(N)$ с $N > 2$ антикоммутатор двух матриц T содержит матрицы T , и шпур не зануляется.) Остающиеся два типа треугольников дают два арифметических уравнения на гиперзаряды лептонов и кварков. Компенсация аномалий в переходе B в два A_i имеет место, если сумма гиперзарядов левых частиц (только левые частицы взаимодействуют с A_i) равна нулю:

$$\Sigma Y_L \equiv Y_{\nu_L} + Y_{e_L} + 3Y_{u_L} + 3Y_{d_L} = 0 \quad , \quad (4.29)$$

где множитель 3 возникает от трех цветов кварков, и мы ограничились первым семейством фермионов. Гиперзаряды изопартнеров (ν_L и e_L , u_L и d_L) равны, поэтому из (4.29) получим:

$$Y_{e_L} + 3Y_{u_L} = 0 \quad . \quad (4.30)$$

Пользуясь уравнением (3.24), выразим гиперзаряды частиц через их электрические заряды и величины третьей проекции изоспина. Подставляя $(T_3)_{e_L} = -1/2$, $(T_3)_{u_L} = +1/2$, получим

$$Q_{e_L} + 3Q_{u_L} = 1 \quad (4.31)$$

Уберем индекс “L” (электрические заряды левых и правых компонент одинаковы) и заменим один заряд u -кварка на заряд d -кварка:

$$Q_e + 2Q_u + Q_d = 0 \quad . \quad (4.32)$$

Итак, из требования отсутствия аномалии в переходе B в два A_i получено требование нейтральности атома водорода. Нейтральность нейтрино и нейтрона пока не доказана.

Рассмотрение треугольника B^3 позволит доказать, что заряд электрона равен -1 , u -кварка $-2/3$, d -кварка $-1/3$, а нейтрино и нейтрон нейтральны. Вклады левых и правых частиц в аксиальную аномалию противоположны, поэтому условие отсутствия аномалии в переходе B в два B выглядит так:

$$\Sigma Y_L^3 - \Sigma Y_R^3 = 0 \quad . \quad (4.33)$$

Гиперзаряды левой и правой компоненты массивной частицы связаны с гиперзарядом поля Хиггса, так как соответствующие члены в лагранжиане ((4.21), (4.23)) $U(1)$ -инвариантны. Гиперзаряд хиггсовского дублета равен $+1$ (соответственно выбирается g'). Учитывая, что в изодублетах имеется два партнера и кварки бывают трех цветов, получим

$$2Y_{e_L}^3 + 2 \cdot 3Y_{u_L}^3 - (Y_{e_L} - 1)^3 - 3(Y_{u_L} + 1)^3 - 3(Y_{u_L} - 1)^3 = 0 \quad (4.34)$$

или

$$Y_{e_L}^3 + 3Y_{e_L}^2 - 3Y_{e_L} - 18Y_{u_L} + 1 = 0 \quad (4.35)$$

Выражая с помощью (4.30) Y_{u_L} через Y_{e_L} , окончательно получим

$$(Y_{e_L} + 1)^3 = 0 \quad (4.36)$$

что и дает обещанные значения зарядов кварков и лептонов:

$$Q_e = -1 \quad , \quad Q_\nu = 0 \quad , \quad Q_u = 2/3 \quad , \quad Q_d = -1/3 \quad . \quad (4.37)$$

Итак, в СМ гиперзаряды, а значит, и электрические заряды, не являются свободными параметрами теории – они фиксируются требованием отсутствия аномалий.

Закончим обсуждение аномалий четырьмя замечаниями.

1. Масса нейтрино. Если минимальная модель расширяется за счет введения правых нейтрино, то к левой части уравнения (4.34) добавляется слагаемое $-(Y_{e_L} + 1)^3$, после чего уравнение (4.34) сводится к уравнению (4.30), и мы теряем условие квантования зарядов (4.37). Итак, вводя в теорию дираковские нейтрино, мы теряем теоретическое основание для нейтральности нейтрино. Этот факт наряду с малостью масс нейтрино дает основание искать механизм генерации масс нейтрино, отличный от работающего для кварков и заряженных лептонов.

2. Нетрудно убедиться, что равна нулю также разность суммы гиперзарядов левых кварков и суммы гиперзарядов правых кварков:

$$Y_{u_L} + Y_{d_L} - Y_{u_R} - Y_{d_R} = 0 \quad (4.38)$$

Это равенство не случайно – оно возникает из требования сокращения аномалии в переходе B в два глюона. Учет связи кварков с бозоном Хиггса в лагранжиане модели ГВС обращает равенство (4.38) в тождество. Отсутствие аномалии в переходе B в пару гравитонов требует выполнения следующего равенства:

$$3Y_{u_L} + 3Y_{d_L} + Y_{e_L} + Y_{\nu_L} - 3Y_{u_R} - 3Y_{d_R} - Y_{e_R} = 0 \quad (4.39)$$

Учитывая (4.38), получаем соотношение между гиперзарядами лептонов:

$$Y_{e_L} + Y_{\nu_L} - Y_{e_R} = 0 \quad (4.40)$$

В силу того, что e_L и ν_L находятся в одном изомультиплете ($Y_{e_L} = Y_{\nu_L}$), а e_L и e_R взаимодействуют с бозоном Хиггса ($Y_{e_R} = Y_{e_L} - 1$) из (4.40) получаем

$$Y_{e_L} = -1 ,$$

что совпадает с уравнением (4.36). Введение в теорию правого нейтрино обращает (4.40) в тождество, и требование нейтральности нейтрино пропадает.

3. При обсуждении $SU(2)_A$ симметрии в мире безмассовых кварков в первой лекции говорилось, что она реализуется на триплете безмассовых π -мезонов. На самом деле лагранжиан КХД с безмассовыми u - и d -кварками имеет более высокую $SU(2)_A \times U(1)_A$ симметрию; четвертый сохраняющийся аксиальный ток является изоскаляром. При этом в спектре физических частиц должен присутствовать изоскалярный мезон с массой порядка массы π -мезона. Переход к $SU(3)_A \times U(1)_A$ -симметрии требует появления девятого легкого мезона, которым никак не может быть η' с массой 960 МэВ. Отсутствие легкого изоскалярного мезона получило название $U(1)$ -проблемы, широко обсуждавшейся в 60-е годы. С появлением КХД стало ясно, что синглетный аксиальный ток не сохраняется: $\partial_\mu J_\mu^5 \sim \alpha_s G \tilde{G}$, где G – тензор глюонного поля. Таким образом, большая масса η' -мезона служит наглядным проявлением треугольной аномалии. Во избежание недоразумения подчеркнем, что в СМ нет векторного бозона, который взаимодействовал бы с синглетным аксиальным током, поэтому аномалия в нем не приводит к нарушению перенормируемости теории.

4. До сих пор, говоря об аномалии, мы подчеркивали ее “ультрафиолетовый” характер. Оказывается, имеется и противоположный, “инфракрасный”, аспект этого явления, обнаруженный Долговым и Захаровым . Как уже говорилось в первой лекции, матричный элемент бесцветного изотриплетного аксиального кваркового тока между вакуумом и двумя фотонами имеет сингулярность $1/q^2$, если кварки безмассовы. Более аккуратная формула содержит $1/(q^2 + i\varepsilon)$, мнимая часть от чего $\sim \delta(q^2)$. Наличие ненулевой мнимой части означает, что никакими контрчленами или ультрафиолетовой регуляризацией аномалию устранить нельзя. Ее пропорциональность $\delta(q^2)$ показывает, что в теории имеются безмассовые частицы. На уровне лагранжиана этими частицами являются кварки: u и d – в случае $SU(2)$ u , d и s – в случае $SU(3)$. Но кварки не вылетают, а наличие аномалий в бесцветных $SU(2)$ и $SU(3)$ аксиальных токах в треугольниках вида AVV требует наличия безмассовых адронов. Нетривиальная инфракрасная динамика не может “убрать” аномалию – это гарантирует ее ультрафиолетовый аспект, а в ультрафиолете теория возмущений КХД надежна. В случае группы $SU(2)$ безмассовым мог бы быть изодублет (p, n) . Однако в $SU(3)$ нет бесцветных адронов со спином $1/2$, преобразующихся по фундаментальному представлению флэйворной группы. Нуклоны принадлежат октетному представлению $(N, \Lambda, \Sigma, \Xi)$. Поэтому единственная остающаяся возможность – октет (почти) безмассовых псевдоскалярных мезонов (π, K, η) и

Намбу-Голдстоуновская реализация $SU(3)_A$.

Л Е К Ц И Я 5

Рождение и распады W - и Z -бозонов.

W - и Z -бозоны были впервые зарегистрированы на специально построенном с этой целью $p\bar{p}$ -коллайдере ЦЕРН. Рождаются они в $u\bar{d}$, $d\bar{u}$ и $u\bar{u}$ и $d\bar{d}$ -столкновениях соответственно. Основным источником кварков являются протоны, антикварков – антипротоны. При последующем распаде W возникает характерная угловая асимметрия: спин W^+ выстроен в направлении пучка антипротонов, и образующиеся в распадах $W^+ \rightarrow e^+\nu, \mu^+\nu$ положительно заряженные лептоны, являясь правыми, летят преимущественно по спину W^+ , т.е. по пучку \bar{p} . Отрицательно заряженные лептоны наоборот летят преимущественно по пучку протонов. Образование одиночных заряженных лептонов (нейтрино не детектируется) с большим перпендикулярным направлению пучка импульсом и характерной угловой асимметрией послужило четким указанием на рождение W -бозона. В случае Z -бозона регистрируются оба лептона от распада $Z \rightarrow l^+l^-$ и Z идентифицируется по пику в инвариантной массе продуктов распада. В экспериментах на $p\bar{p}$ -коллайдере впервые были измерены массы W и Z . Наиболее точное на сегодняшний день измерение массы Z -бозона проделано на e^+e^- -коллайдере LEP I при суммарной энергии пучков, равной массе Z -бозона (диаграмма рис. 5.1). Масса и ширина W точнее всего измеряется на Тэватроне.

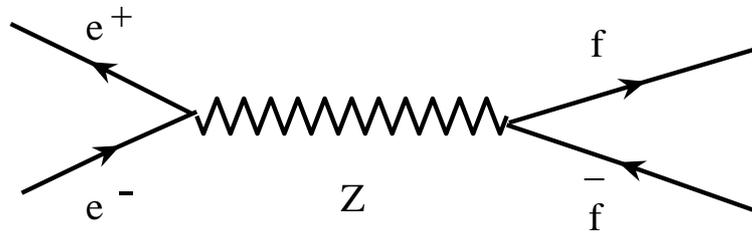


Рис. 5.1 Рождение Z бозона с последующим распадом на пару $f\bar{f}$ в e^+e^- -аннигиляции (ускорители SLC и LEP I).

Ширина W -бозона, приводимая в таблицах свойств элементарных частиц, равна

$$\Gamma_W^{\text{ЭКСП}} = 2.14 \pm 0.04 \text{ ГэВ} . \quad (5.1)$$

Полная ширина W -бозона складывается из ширины распадов в пары лептонов и кварков:

$$\Gamma_W = 3\Gamma_{W \rightarrow e\nu} + 2\Gamma_{W \rightarrow u\bar{d}} , \quad (5.2)$$

где учтены 5 каналов распада: $e\nu_e$, $\mu\nu_\mu$, $\tau\nu_\tau$, $u\bar{d}$ и $c\bar{s}$. Для амплитуды распада в $e\nu$ имеем

$$A_{W \rightarrow e\nu} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma_\alpha \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu_e W_\alpha \quad , \quad (5.3)$$

квадрируя которую, суммируя по поляризациям конечного электрона и пользуясь матрицей плотности W -бозона $\rho_{\alpha\beta} = -\frac{1}{3}(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M_W^2})$, получим

$$\overline{\Sigma|A|^2} = \frac{g^2}{2} Sp(\hat{p}_e \gamma_\alpha \hat{p}_\nu \gamma_\beta \frac{1 + \gamma_5}{2}) W_\alpha W_\beta = \frac{g^2}{3} 2p_e p_\nu = \frac{g^2}{3} M_W^2 \quad , \quad (5.4)$$

где мы пренебрегли членами $\sim m_e^2/m_W^2$. Для ширины распада получим

$$\Gamma_{W \rightarrow e\nu} = \frac{\overline{\Sigma|A|^2}}{2M_W} \tau_2 = \frac{g^2 M_W}{48\pi} = \frac{G_F M_W^3}{6\sqrt{2}\pi} \quad , \quad (5.5)$$

где было использовано выражение для ультрарелятивистского 2-х-частичного фазового объема $\tau_2 = \frac{1}{8\pi}$ и связь калибровочной константы с фермиевской $g^2/8M_W^2 = G_F/\sqrt{2}$.

Помнящие выражение для асимптотики поляризационного оператора фотона при $q^2 \gg m_e^2$ могут получить ту же формулу без всяких вычислений:

$$\Gamma_{W \rightarrow e\nu} = \frac{\text{Im}\Pi_W(q^2)}{M_W} = \frac{\alpha_W M_W^2}{2(\sqrt{2})^2 \cdot 3\pi M_W} \text{Im} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right) = \frac{g^2}{48\pi} M_W \quad . \quad (5.6)$$

Подставляя числа, получим

$$\Gamma_{W \rightarrow e\nu} = 226 \text{ МэВ} \quad , \quad \Gamma_W = 9\Gamma_{W \rightarrow e\nu} = 2.03 \text{ ГэВ} \quad , \quad (5.7)$$

где учтены распады на $\mu\nu$, $\tau\nu$, $u\bar{d}$ и $c\bar{s}$ и кварковая ширина учитывает наличие трех цветов. Учет глюонной поправки к распаду $W \rightarrow q\bar{q}$ домножает кварковую ширину на $1 + \frac{\alpha_s(M_W)}{\pi}$, несколько увеличивая ширину W -бозона:

$$\Delta\Gamma_W = \frac{\alpha_s}{\pi} \cdot 6\Gamma_{W \rightarrow e\nu} = 0.05 \text{ ГэВ} \quad , \quad (5.8)$$

$$(\Gamma_W + \Delta\Gamma_W)_{\text{теор}} = 2.09 \text{ ГэВ} \quad ,$$

что согласуется с (5.1) (мы использовали значение $\alpha_s(M_W) = 0.12$).

Точное измерение параметров Z -бозона проделано на e^+e^- -коллайдерах СЛАК и ЦЕРН. Сечение рождения Z -бозона в e^+e^- -аннигиляции описывается формулой Брейта-Вигнера:

$$\sigma = \frac{4\pi(2J+1)}{2 \cdot 2M_Z^2} \frac{\Gamma_i \Gamma_f}{(E - M_Z)^2 + \Gamma_Z^2/4} \quad , \quad (5.9)$$

где $J = 1$ – спин резонанса, Γ_i – ширина распада $Z \rightarrow e^+e^-$, Γ_f – ширина распада Z в конечное состояние, M_Z и Γ_Z – масса и полная ширина Z -бозона.

Задача 5. Оценить величину поправки к сечению в пике Z -бозона, описываемому формулой (5.9), за счет диаграммы, в которой промежуточный Z -бозон заменен фотоном.

Наблюдаемое на эксперименте сечение сильно отличается от Брейт-Вигнеровского за счет квантовоэлектродинамических радиационных поправок, связанных с испусканием реальных и виртуальных фотонов. Численно наиболее заметный эффект – дважды логарифмические поправки к сечению в резонансе. Дважды логарифмические поправки хорошо изучены в квантовой электродинамике (В.В.Судаков, 1956). Обычно уменьшающие сечение поправки такого типа от виртуальных фотонов сокращаются с испусканием реальных фотонов, и в полном сечении с учетом мягких фотонов больших дважды логарифмических поправок нет. Специфика узкого резонанса (Z -бозона) в том, что происходит “недокомпенсация” дважды логарифмов – испускание мягких фотонов с энергией, бóльшей, чем ширина резонанса “выводит” сечение из резонанса. В итоге сечение в пике Z подавлено множителем $\exp[-\frac{2\alpha}{\pi} * \ln(\frac{M_Z^2}{m_e^2}) \ln(\frac{M_Z}{\Gamma_Z})] \approx 0.7$, где мы использовали $\Gamma_Z = 2.5$ ГэВ (см. ниже). Сечение подавлено в полтора раза по сравнению с древесной формулой. Другой заметный эффект – асимметрия Брейт-Вигнеровской кривой – возникает за счет излучения фотона из начального электрона (или позитрона), когда суммарная энергия e^+e^- превышает массу Z . Излучение фотона возвращает реакцию в резонанс, и сечение увеличивается – правое крыло резонансной кривой приподнято. При анализе экспериментальных данных электродинамические эффекты тщательно учитываются; мы же в педагогических целях ограничимся обсуждением формулы (5.9). Положение максимума резонансной кривой и ее полуширина позволяют измерить M_Z и Γ_Z . Выход электрон-позитронных пар дает ширину распада $Z \rightarrow e^+e^-$; $\mu^+\mu^-$ и $\tau^+\tau^-$ пар – $\Gamma_Z \rightarrow \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-$; адронов – $\Gamma_Z \rightarrow$ адроны. По “невидимой ширине Z ” (равной разности полной ширины и суммы вероятностей распада на заряженные лептоны и кварки) находят ширину $Z \rightarrow \nu\bar{\nu}$. Из других наблюдаемых в Z -пике чрезвычайно важной является асимметрия вперед-назад A_{FB} , равная отношению разности сечений реакций $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow f\bar{f}$ в переднюю и заднюю полусферы к их сумме. Эта асимметрия возникает за счет поляризованности рождаемого Z -бозона. На ускорителе SLC имеется возможность создавать пучки продольно поляризованных электронов, что позволяет измерять асимметрию A_{LR} – отношение разности числа Z -бозонов, рождаемых левыми и правыми электронами, к полному числу образующихся Z -бозонов. Также с хорошей точностью измеряется ширина Z в пару кварков $b\bar{b}$ и с несколько худшей – в пару $c\bar{c}$.

Получим формулы, описывающие распады Z -бозона. Амплитуду распада на фермион-антифермионную пару запишем в следующем общем виде:

$$A_{Z \rightarrow f\bar{f}} = \frac{\bar{g}}{2} \bar{f} (g_V^f \gamma_\alpha + g_A^f \gamma_\alpha \gamma_5) f Z_\alpha, \quad (5.10)$$

где значения g_V и g_A определяются третьей проекцией изоспина и электрическим зарядом фермиона: $g_V^f = T_3^f - 2Q^f \sin^2 \theta_W$, $g_A^f = T_3^f$. Проведя те же выкладки, что и для W -бозона (или воспользовавшись результатом (5.6)), для ширины распада Z получим

$$\Gamma_{Z \rightarrow ff} = \frac{G_F M_Z^3}{6\sqrt{2}\pi} [(g_V^f)^2 + (g_A^f)^2] = 332[(g_V^f)^2 + (g_A^f)^2] \text{ МэВ} . \quad (5.11)$$

Начнем с невидимой ширины: распада Z -бозона на пару нейтрино-антинейтрино. Учитывая, что нейтрино бывает трех сортов (ν_e, ν_μ, ν_τ), получим

$$\Gamma_{Z \rightarrow \nu\nu}^{\text{теор}} = 3 \cdot 332 \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] = 498 \text{ МэВ} , \quad (5.12)$$

что следует сравнить с экспериментальным результатом:

$$\Gamma_{inv}^{\text{эксп}} = 499 \pm 1.5 \text{ МэВ} . \quad (5.13)$$

(inv – от invisible, невидимый). Согласие вполне удовлетворительное.

Значение этого совпадения фундаментально: в природе нет четвертого и последующих кварк-лептонных поколений, устроенных так же, как три известных поколения. Массы кварков и заряженных лептонов в каждом следующем поколении больше, чем в предыдущем. При этом можно ожидать, что фермионы последующих поколений так тяжелы, что они не рождаются на существующих ускорителях. Однако массы всех трех известных нейтрино гораздо меньше. Значит, наличие новых поколений должно приводить к существованию дополнительных (четвертого, пятого и т.д.) нейтрино, увеличивая тем самым невидимую ширину Z . Но это противоречит измерению (5.13). Таким образом, изучение Z -бозона позволяет заглянуть в кинематически (пока) не достижимую область энергий. Вместе с тем, нельзя исключить существование последующих поколений, в которых масса нейтральных лептонов больше половины массы Z -бозона.

Перейдем к распаду Z на пару заряженных лептонов: e^+e^- , $\mu^+\mu^-$ и $\tau^+\tau^-$. В силу лептонной универсальности амплитуды этих распадов одинаковы. Приведем экспериментальные значения векторной и аксиальной констант распада Z на пару заряженных лептонов, полученные в приближении лептонной универсальности (которая отдельно проверена и хорошо выполняется в распадах $Z \rightarrow l^+l^-$):

$$g_{Al}^{\text{эксп}} = -0.5012 \pm 0.0003 , \quad (5.14)$$

$$g_{Vl}^{\text{эксп}} = -0.0378 \pm 0.0004 . \quad (5.15)$$

Для извлечения численных значений этих двух параметров потребовались две измеряемые величины. Одной такой величиной является ширина распада Z в заряженные лептоны; другой – асимметрия вперед-назад в реакции $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow l^+l^-$. Квадрируя

амплитуду указанной реакции, получим

$$A_{FB} = \frac{\int_0^1 \frac{d\sigma}{d\cos\theta} d\cos\theta - \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{d\cos\theta} d\cos\theta}{\int_0^1 \frac{d\sigma}{d\cos\theta} d\cos\theta + \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{d\cos\theta} d\cos\theta} \sim \frac{g_V^e g_A^e g_V^l g_A^l}{[(g_V^e)^2 + (g_A^e)^2][(g_V^l)^2 + (g_A^l)^2]} . \quad (5.16)$$

Задача 6. Получить выражение для асимметрии вперед–назад в реакции $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow l^+l^-$.

Измеряемая в Стэнфорде на SLC асимметрия A_{LR} (пропорциональная разности числа Z -бозонов, рождаемых левым и правым электронами) линейна по малой константе g_V^e , поэтому, обладая существенно меньшей статистикой, чем набранная на LEP, данные SLC по g_V^e имеют точность, не сильно уступающую точности, достигнутой на LEP. Число (5.15) учитывает данные обоих ускорителей.

Каковы теоретические предсказания? Воспользовавшись значением синуса электро-слабого угла (4.16), получим

$$g_{Al}^{\text{теор}} = -0.5 , \quad g_{Vl}^{\text{теор}} = -0.076 . \quad (5.17)$$

Значение аксиальной константы неплохо согласуется с экспериментальным числом, чего нельзя сказать о векторной константе: различие достигает 95 экспериментальных ошибок. Это большое различие связано с тем, что при вычислении $\sin\theta_W$ по формуле (4.15) было использовано значение постоянной тонкой структуры $\alpha = (137\dots)^{-1}$, описывающее взаимодействие фотона с заряженными частицами при низких энергиях. В анализируемых нами процессах распада Z -бозона характерные энергии – порядка M_Z . Наличие двух этих шкал приводит к тому, что в радиационных поправках к слабым процессам возникают большие логарифмы $\ln(\frac{M_Z}{m_e})$. Эти логарифмы связаны с изменением электромагнитной константы, и их удобно учесть с самого начала, отделив от собственно слабых радиационных поправок, которые будут рассмотрены в девятой лекции. Отметим, что G_μ и M_Z определяются сразу на шкале слабых взаимодействий, поэтому логарифмически усиленные радиационные поправки присутствуют только в беге α . Ноль – зарядное поведение α приводит к ее росту с увеличением энергии. Аккуратное вычисление дает: $\alpha(M_Z) \equiv \bar{\alpha} = [128.95 \pm 0.05]^{-1}$ (см. лекцию 9). Определенный по формуле (4.15) с заменой α на $\bar{\alpha}$ электрослабый угол смешивания будем называть θ без индекса “ W ”. Для $\sin^2\theta$ найдем

$$\sin^2\theta = 0.2310(1) , \quad (5.18)$$

и, подставляя это число в формулу для g_V^e , получаем

$$g_{Vl}^{\text{теор}}(\bar{\alpha}) = -0.0380 \pm 0.0002 - \quad (5.19)$$

– число, прекрасно согласующееся с экспериментальным результатом (5.15). Используя аксиальную константу из (5.17) и векторную из (5.19), по формуле (5.11) для ширины распада Z в пару заряженных лептонов получим

$$\Gamma_{Z \rightarrow l^+ l^-}^{\text{теор}} = 83.48 \text{ МэВ} . \quad (5.20)$$

Приведем экспериментальное значение ширины распада Z на пару заряженных лептонов:

$$\Gamma_{Z \rightarrow l^+ l^-}^{\text{эксп}} = 83.98 \pm 0.09 \text{ МэВ} . \quad (5.21)$$

Наконец, перейдем к распадам Z в адроны. Аксиальная константа для верхних кварков равна $+1/2$, для нижних $-1/2$. Векторная константа верхних кварков $g_{V_{up}} = \frac{1}{2} - \frac{4}{3}s^2$, нижних $g_{V_{down}} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}s^2$. Учитывая распады Z -бозона в $u\bar{u}$, $c\bar{c}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$ и $b\bar{b}$ и используя численное значение s^2 из (5.18), имеем

$$\Gamma_{Z \rightarrow \text{адр}} = 3 \cdot 332 \left\{ 2 \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}s^2 \right)^2 \right] + 3 \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}s^2 \right)^2 \right] \right\} \text{ МэВ} = 1676 \text{ МэВ} , \quad (5.22)$$

где первый множитель учитывает три цвета кварков. Для сравнения с экспериментом необходимо учесть радиационные поправки, возникающие за счет излучения и обмена глюонами. В первом порядке по α_s они сводятся к умножению правой части (5.22) на $(1 + \frac{\alpha_s}{\pi})$. Экспериментаторы приводят следующее значение:

$$\Gamma_{Z \rightarrow \text{адр}} = 1744 \pm 3 \text{ МэВ} . \quad (5.23)$$

Сравнивая две последние формулы и учитывая множитель $1 + \alpha_s/\pi$, получаем величину константы сильного взаимодействия на масштабе M_Z , следующую из полной ширины распада Z в адроны:

$$\alpha_s(M_Z) = 0.127 \pm 0.006 . \quad (5.24)$$

Значение $\alpha_s(M_Z)$, определяемое из ширины адронных распадов Z , с учетом электрослабых радиационных поправок и высших поправок по α_s , смещается и становится равным 0.118. Ошибка же оказывается равной 0.003, делая адронные распады Z одним из лучших мест для определения численного значения константы сильного взаимодействия.

Для полной ширины Z -бозона имеем

$$\Gamma_Z^{\text{теор}} = [498 + 3 \times 83.48 + (1 + \frac{0.12}{\pi})1676] \text{ МэВ} = 2488.5 \text{ МэВ} , \quad (5.25)$$

что следует сравнить с определяемым по форме резонансной кривой Z -бозона числом:

$$\Gamma_Z^{\text{эксп}} = 2495.2 \pm 2.3 \text{ МэВ} . \quad (5.26)$$

Для сечения рождения адронов в пике Z из формулы (5.9) следует:

$$\sigma_{\text{адр}}^{\text{теор}} = \frac{12\pi}{M_Z^2} \frac{\Gamma_{Z \rightarrow ee} \Gamma_{Z \rightarrow \text{адр}}}{\Gamma_Z^2} = 41.45 \text{ нанобарна} , \quad (5.27)$$

что отстоит на два стандартных отклонения от экспериментального числа

$$\sigma_{\text{адр}}^{\text{эксп}} = 41.54 \pm 0.04 \text{ нанобарна} , \quad (5.28)$$

где $1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2$, $1 \text{ нанобарн} = 10^{-9} \text{ барн}$.

Древесные формулы, в которых α заменено на $\bar{\alpha}$, с неплохой точностью описывают распады Z -бозона. Наихудшее согласие – в параметре g_A – достигает четырех стандартных отклонений. Хуже обстоит дело с массой W -бозона – древесный результат (4.17) отстоит от экспериментального числа на 20 стандартных отклонений. Переход от α к $\bar{\alpha}$ изменяет теоретическое предсказание:

$$(M_W^{\text{теор}})' = \cos \theta M_Z = 79.96 \text{ ГэВ} , \quad (5.29)$$

тем не менее, разница с экспериментальным числом по-прежнему на уровне 15-ти стандартных отклонений (теперь – в другую сторону). Учет электрослабых радиационных поправок приводит к хорошему описанию как массы W -бозона, так и параметров распада Z в рамках СМ (подробнее см. лекцию 10).

Л Е К Ц И Я 6

Бозон Хиггса: масса, рождение, распады.

Как уже было сказано в третьей лекции, масса бозона Хиггса определяется константой, стоящей в лагранжиане при четвертичном члене по полям Хиггса:

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\lambda^2 \left[H^+ H - \frac{\eta^2}{2} \right]^2, \quad M_H = \lambda\eta, \quad (6.1)$$

а необнаружение хиггсовского бозона на ускорителе LEP II показывает, что λ не мала:

$$M_H > 114 \text{ ГэВ} \implies \lambda \gtrsim 0.5. \quad (6.2)$$

Петли с обменом H сдвигают массы W - и Z -бозонов, а также влияют на константы взаимодействия Z -бозона с лептонами и кварками (см. лекцию 9). Точное измерение этих величин для массы хиггсовского бозона дает (лекция 10)

$$M_H = 80^{+30}_{-20} \text{ ГэВ}; \quad (6.3)$$

на 95%-ом уровне достоверности (у.д.) с учетом прямого ограничения (6.2) было получено

$$M_H < 200 \text{ ГэВ}. \quad (6.4)$$

Это ограничение имеет место в Стандартной Модели и, как отмечается в десятой лекции, новая физика может привести к петлевым поправкам, ликвидирующим центральное значение (6.3) и верхнее ограничение (6.4).

Наконец, Тэватрон на 95%-ом у.д. исключает интервал $175 \text{ ГэВ} > M_H > 158 \text{ ГэВ}$ (лето 2010 года).

Увеличение константы самодействия хиггсовских бозонов λ приводит к сильному взаимодействию в хиггсовском секторе Стандартной Модели. При этом хиггсовский бозон, масса которого пропорциональна λ , становится тяжелым. Посмотрим, при каких λ и M_H это происходит (Бен Ли, Квиг, Тэкер; Велтман, 1977). Рассмотрим упругое рассеяние продольных Z -бозонов: $Z_L Z_L \rightarrow Z_L Z_L$. На древесном уровне амплитуда описывается тремя диаграммами, см. рис. 6.1.

Для амплитуды рассеяния при высоких энергиях и для достаточно тяжелого хиггсовского бозона ($s \gg M_H^2 \gg M_{W,Z}^2$) нетрудно получить

$$\begin{aligned} M &= 4\sqrt{2}G_F M_Z^4 \left[\frac{(e_1 e_2)(e_3 e_4)}{s - M_H^2} + \frac{(e_1 e_3)(e_2 e_4)}{t - M_H^2} + \frac{(e_1 e_4)(e_2 e_3)}{u - M_H^2} \right] \approx \\ &\approx \sqrt{2}G_F \left[\frac{s^2}{s - M_H^2} + \frac{t^2}{t - M_H^2} + \frac{u^2}{u - M_H^2} \right] = \\ &= \sqrt{2}G_F M_H^2 \left[\frac{s}{s - M_H^2} + \frac{t}{t - M_H^2} + \frac{u}{u - M_H^2} \right] \approx 3\sqrt{2}G_F M_H^2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где мы использовали соотношение $s + t + u = 4M_Z^2 \approx 0$ и последнее равенство предполагает, что мы не рассматриваем рассеяние на малые углы.

Дифференциальное сечение рассеяния следующим образом выражается через квадрат модуля амплитуды:

$$d\sigma = \frac{|M|^2}{64\pi^2 s} dO = |f|^2 dO \quad , \quad (6.6)$$

где мы ввели амплитуду рассеяния f , имеющую размерность длины. Амплитуда f описывает рассеяние частиц с определенными спиральностями λ_1 и λ_2 , падающими вдоль направления \vec{n} и разлетающимися вдоль направления \vec{n}' , причем спиральности разлетающихся частиц равны λ_3 и λ_4 . Направляя ось z по \vec{n} , найдем, что f следующим образом раскладывается по амплитудам рассеяния в состояниях с фиксированным полным моментом J :

$$\langle n', \lambda' | f | n, \lambda \rangle = \sum_J (2J + 1) D_{\Lambda' \Lambda}^J(n') \langle \lambda' | f^J | \lambda \rangle \quad , \quad (6.7)$$

где $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\Lambda' = \lambda_3 - \lambda_4$, а $D_{\Lambda' \Lambda}^J$ – матрица конечных вращений (Берестецкий, Лифшиц, Питаевский). Условие унитарности S -матрицы для парциальных амплитуд дает

$$\text{Im} f^J = |\vec{p}| \left[(\text{Re} f^J)^2 + (\text{Im} f^J)^2 + \dots \right] \quad , \quad (6.8)$$

где многоточием обозначен вклад неупругих каналов, \vec{p} – импульс частиц в с.ц.и. Для вещественной части амплитуды рассеяния с фиксированным J получаем ограничение сверху: $(\text{Re} f^J)^2 < (1/(2|\vec{p}|))^2$. В случае продольных Z -бозонов $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ и $D_{00}^J = P_J(\cos \theta)$; (6.7) сводится к разложению по полиномам Лежандра². Разложение (6.7) обобщает обычное разложение амплитуды рассеяния по парциальным амплитудам для случая бесспиновых частиц. Амплитуда (6.5) не зависит от угла рассеяния – значит, рассеяние идет в состоянии с $J = 0$, и, учитывая связь M и f , получим: $(\text{Re} M)^2 < (8\pi)^2$.

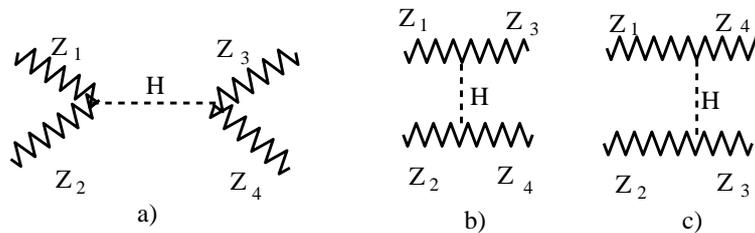


Рис. 6.1. Диаграммы, описывающие упругое рассеяние Z -бозонов.

²В рассматриваемом в первой лекции $\nu_e e$ -рассеянии также $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 0$, $\Lambda' = \lambda_3 - \lambda_4 = 0$, и мы имеем рассеяние с $J = 0$.

Так как древесные графики дают вещественную амплитуду, то полученное ограничение применимо к s -волновой амплитуде (6.5):

$$3\sqrt{2}G_F M_H^2 < 8\pi, \quad M_H < \left(\frac{4\sqrt{2}\pi}{3G_F}\right)^{1/2} = 730 \text{ ГэВ} . \quad (6.9)$$

Если масса хиггса превышает полученное верхнее ограничение, то вычисление амплитуды $Z_L Z_L$ -рассеяния в рамках теории возмущений неверно – велика роль промежуточных многочастичных состояний, и рассеяние векторных бозонов при Тэвной энергии похоже на рассеяние адронов при Гэвных энергиях.

Велтман называет массу хиггса вторым порогом электрослабой теории (первый порог – массы W и Z , конечность которых обуславливает унитарность четырехфермионного рассеяния).

Протон-протонный коллайдер ЛНС имеет достаточные энергию и светимость для обнаружения бозона Хиггса во всем разрешенном интервале масс:

$$114 \text{ ГэВ} < M_H < 1 \text{ ТэВ} . \quad (6.10)$$

Рассмотрим рождение H в pp -столкновениях. Константа взаимодействия бозона Хиггса с входящими в состав протона легкими кварками пропорциональна m_q/η , где m_q – лагранжевы массы легких кварков. Вклад данного механизма в рождение H ничтожен ($m_q/\eta < 10 \text{ МэВ}/250 \text{ ГэВ} = 4 \cdot 10^{-5}$). Значительно большее сечение рождения обусловлено аннигиляцией входящих в состав протонов глюонов, $gg \rightarrow H$. Дублет хиггсов синглетен по цвету, поэтому глюоны не взаимодействуют с бозоном Хиггса на древесном уровне. Связь возникает за счет петлевых диаграмм, в которых в петле распространяются взаимодействующие как с глюонами, так и с хиггсом, кварки. Простейшая треугольная диаграмма показана на рис. 6.2.

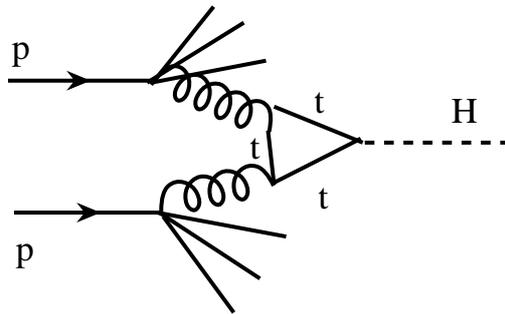


Рис. 6.2. Рождение хиггса в pp -столкновениях.

Если в петле распространяется кварк, масса которого m_q много меньше M_H , то m_q можно пренебречь в кварковых пропагаторах, и зависимость от m_q останется только в вершине $\bar{q}qH$, содержащей m_q/η . Если M_H – порядка ТэВ’а, то доминировать в его рождении будет t -кварковая петля.

В противоположном пределе $M_H \ll 2m_t$ в t -кварковых пропагаторах можно пренебречь внешними импульсами. Сделать это надо аккуратно, выделив предварительно импульсы глюонов, которым диаграмма пропорциональна в силу калибровочной инвариантности ($M \sim HG_{\mu\nu}^2$). Из размерных соображений ясно, что оставшийся интеграл обратно пропорционален m_t . Учитывая пропорциональность вершины $\bar{t}tH$ массе t -кварка, окончательно получим, что в пределе $M_H \ll 2m_t$ амплитуда изображенного на рис. 6.2 процесса не зависит от m_t . Треугольники с более легкими кварками по-прежнему подавлены как m_q/η . Итак, при всех M_H из разрешенного интервала (6.10) t -кварковый треугольник доминирует в рождении хиггса.

Вклад t -кварка в амплитуду для произвольного отношения $M_H/2m_t$ определяется вычислением треугольной диаграммы. Однако в пределе $M_H/2m_t \ll 1$ он может быть выписан сразу, если воспользоваться формулой, описывающей вклад t -кварка в бег константы сильного взаимодействия:

$$\alpha_s^t(\Lambda^2) = \frac{\alpha_s(m_t^2)}{1 - \frac{\alpha_s(m_t^2)}{6\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m_t^2}} , \quad (6.11)$$

где значок “ t ” подчеркивает, что учтен только вклад t -кварка, дающий рост константы α_s с ростом импульса.³ Эффективный низкоэнергетический глюонный лагранжиан имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{эфф}} &= -\frac{1}{4g_s^2(\Lambda^2)} G_{\mu\nu}^2 = \\ &= -\frac{1}{4g_s^2(m_t^2)} \left[1 - \frac{\alpha_s(m_t^2)}{6\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m_t^2} \right] G_{\mu\nu}^2 , \end{aligned} \quad (6.12)$$

где глюонные поля нормированы так, что коммутаторный член в тензоре глюонного поля не содержит заряда g_s . Возвращаясь к стандартной нормировке глюонных полей, найдем дополнительный член в эффективном лагранжиане:

$$\delta\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \frac{\alpha_s(m_t^2)}{24\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_t^2} \right) G_{\mu\nu}^2 . \quad (6.13)$$

Знание зависимости от имеющей хиггсовское происхождение массы t -кварка немедленно позволяет найти зависимость от поля H . Для этого надо сделать следующую замену:

$$m_t \rightarrow m_t \left(1 + \frac{H}{\eta} \right) , \quad (6.14)$$

³Известный из квантовой электродинамики коэффициент $1/3$ заменяется на $1/6$ в силу неабелевости теории: $\text{tr}T_a T_b = \frac{1}{2}\delta_{ab}$.

так как только в такой комбинации массы, имеющие хиггсовское происхождение, входят в лагранжиан Стандартной Модели. В линейном по H приближении получим

$$\delta\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \frac{\alpha_s}{12\pi\eta} H G_{\mu\nu}^2 . \quad (6.15)$$

Наконец, для амплитуды перехода в пределе $M_H \ll 2m_t$ найдем

$$M_{gg} = \frac{\alpha_s}{6\pi} G_{\mu\nu}^{a1} G_{\mu\nu}^{a2} \frac{H}{\eta} . \quad (6.16)$$

Так как параметром, от которого зависит треугольная амплитуда, является $(M_H/2m_t)^2$, точность выражения (6.16) достаточно высока для хиггсовского бозона СМ, масса которого меньше 200 ГэВ.

Для нахождения сечения рождения H в pp -столкновениях сечение аннигиляции $gg \rightarrow H$ следует домножить на функции распределения глюонов в протонах и проинтегрировать по этим распределениям.

Перейдем к распадам H . Амплитуда распада на пару фермион-антифермион получается из массового члена в лагранжиане с помощью преобразования (6.14):

$$\delta\mathcal{L} = m_f \bar{f} f \implies \frac{m_f}{\eta} H \bar{f} f . \quad (6.17)$$

Доминирует распад на пару $b\bar{b}$. Соответствующая диаграмма Фейнмана приведена на рис. 6.3.

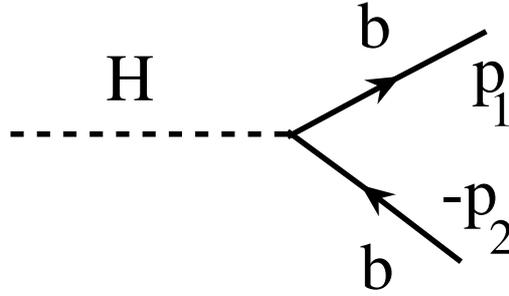


Рис. 6.3. Распад хиггса на пару $b\bar{b}$.

Квадрируя амплитуду, получим

$$\begin{aligned} |M|^2 &= N_c \left(\frac{m_f}{\eta} \right)^2 Sp(\hat{p}_1 + m)(\hat{p}_2 - m) = N_c \left(\frac{m_f}{\eta} \right)^2 2(M_H^2 - 4m^2) = \\ &= N_c \left(\frac{m_f}{\eta} \right)^2 2M_H^2 v^2 , \end{aligned} \quad (6.18)$$

где $N_c = 1$ для распада на лептоны и $N_c = 3$ для распада на кварки, а v – скорость фермиона в системе покоя H . Амплитуда распада пропорциональна скорости – это означает, что он идёт в p -волне. В s -волне распад не идет, что можно понять из сохранения P -четности (P -четность пары фермион-антифермион в s -волне отрицательна, так как P -четности фермиона и антифермиона противоположны, В.Б.Берестецкий, 1948).

Окончательно для ширины распада получим

$$\Gamma_{f\bar{f}} = \frac{|M|^2 v}{2M_H 8\pi} = \frac{N_c}{8\pi} \left(\frac{m_f}{\eta}\right)^2 v^3 M_H . \quad (6.19)$$

Перейдем к распадам H на W и Z . Действуя описанным выше способом, найдем константы взаимодействия H с массивными векторными бозонами:

$$\delta\mathcal{L} = M_W^2 |W|^2 + \frac{1}{2} M_Z^2 Z^2 \implies \frac{2H}{\eta} M_W^2 |W|^2 + \frac{H}{\eta} M_Z^2 Z^2 = g M_W H |W|^2 + \frac{1}{2} \bar{g} M_Z H Z^2 . \quad (6.20)$$

По стандартным правилам найдем

$$\Gamma_{H \rightarrow W^+ W^-} = \frac{\alpha M_H^3}{16s^2 M_W^2} \left[1 - \left(\frac{2M_W}{M_H}\right)^2 + 12 \left(\frac{M_W}{M_H}\right)^4 \right] \sqrt{1 - \frac{4M_W^2}{M_H^2}} . \quad (6.21)$$

Отметим, что в пределе $M_H \gg M_W$ доминирует распад на продольно поляризованные W , обязанные своим происхождением голдстоуновским полям H^\pm . Поэтому лидирующий член в (6.21) равен ширине распада хиггса на безмассовые голдстоуны $H^0 \rightarrow H^+ H^-$ (одно из проявлений теоремы эквивалентности голдстоуновского бозона и состояния продольной поляризации “съевшего” его калибровочного бозона: в пределе $E \gg M_V$ амплитуды рассеяния векторных бозонов совпадают с амплитудами рассеяния голдстоуновских бозонов, что и гарантирует перенормируемость калибровочной теории с хиггсовским механизмом генерации масс векторных частиц).

Ширина распада на пару Z -бозонов получается из (6.21) при учете того, что: а) при нахождении матричного элемента по лагранжиану фактор $1/2$ сокращается, т.к. каждый оператор Z может родить любой из двух Z -бозонов; б) в фазовом объеме двух тождественных Z стоит множитель $1/2!$; в) следует сделать замену α , $M_W \rightarrow \alpha/c^2$, M_Z :

$$\Gamma_{H \rightarrow ZZ} = \frac{\alpha M_H^3}{32s^2 c^2 M_Z^2} \left[1 - \left(\frac{2M_Z}{M_H}\right)^2 + 12 \left(\frac{M_Z}{M_H}\right)^4 \right] \sqrt{1 - \frac{4M_Z^2}{M_H^2}} . \quad (6.22)$$

При $M_H \approx 1$ ТэВ ширина хиггса становится порядка его массы; приближаются к унитарному пределу амплитуды рассеяния W и Z (см. выше). Результаты, полученные в рамках теории возмущений по константе связи, теряют достоверность – поправки к древесным амплитудам не малы. Тем самым на ТэВ’ных энергиях мы приходим к сильным взаимодействиям W , Z и H , причиной чему является большая константа хиггсовского

самодействия λ (ее близость к полюсу Ландау). Физика W , H и Z на Тэвной шкале должна напоминать физику адронов на Гэвной шкале: резонансы, множественное рождение и т.д.

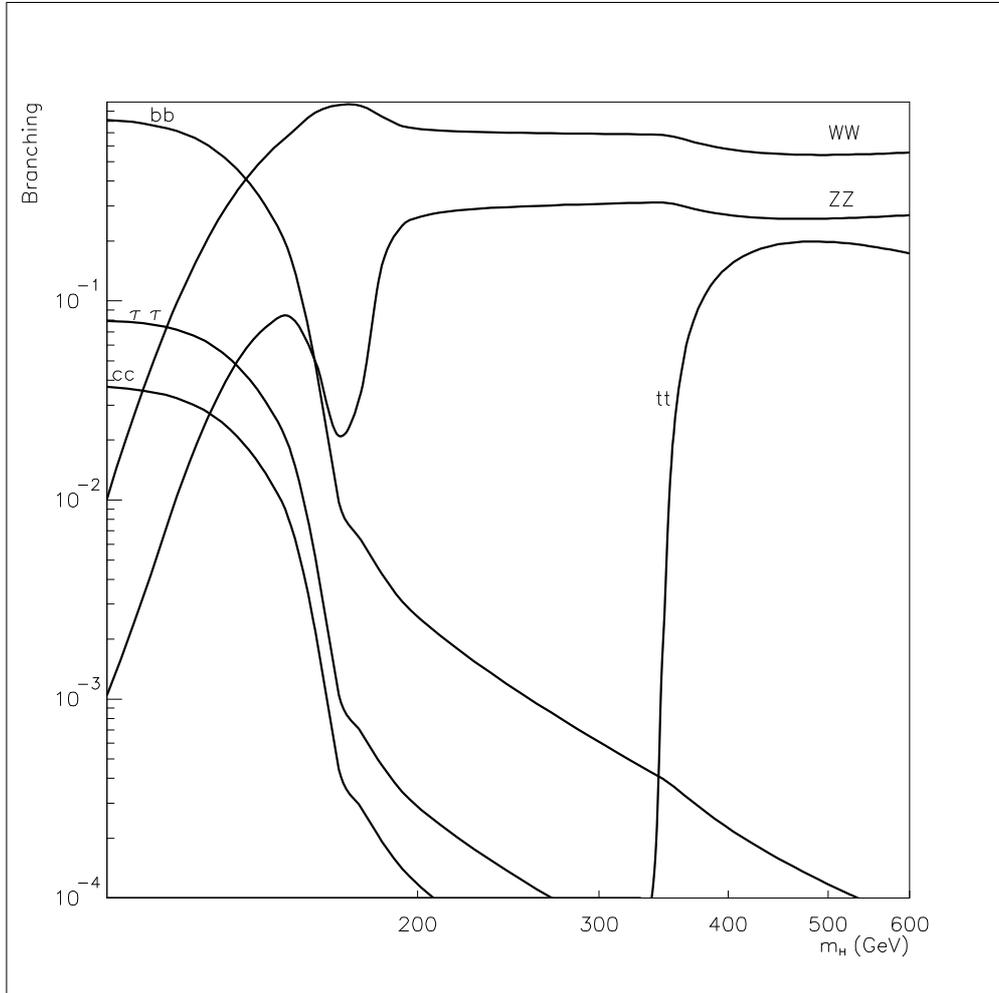


Рис. 6.4. Относительные вероятности распадов H .

На рисунке 6.4 показана зависимость относительных вероятностей распадов по различным каналам от массы бозона Хиггса в Стандартной Модели. При $M_H > 130$ ГэВ легче всего обнаружить хиггс по распадам на пару W или Z , один из которых может быть виртуальным. При меньших M_H доминирует распад $H \rightarrow b\bar{b}$, однако поиск таких распадов на адронном коллайдере затруднен большим фоном. Поэтому наиболее трудным для обнаружения на ЛНС является легкий бозон Хиггса, масса которого близка к нижней границе разрешенного интервала (6.10). Стратегия поиска легкого хиггса основана на его рождении вместе с W - или Z -бозоном с последующим распадом на пару $b\bar{b}$.

В этой области масс перспективен распад на два фотона, $H \rightarrow \gamma\gamma$, малая относительная вероятность которого (частично) компенсируется яркой сигнатурой. Будучи нейтральным хиггс взаимодействует с фотонами через петли, в которых распространяются заряженные частицы: лептоны, кварки и W -бозоны. Та же аргументация, что приводилась для треугольника, описывающего переход $gg \rightarrow H$, показывает, что в фермионных вкладах доминирует треугольник с t -кварком. В пределе $M_H \ll 2M_W, 2m_t$ амплитуда распада $H \rightarrow \gamma\gamma$ вычисляется аналогично амплитуде рождения $gg \rightarrow H$, только вместо эффективного глюонного надо рассмотреть эффективный фотонный лагранжиан и учесть бег постоянной тонкой структуры α за счет вклада t -кварков и W -бозонов. Действуя описанным образом, вместо (6.16) получим

$$M_{\gamma\gamma} = \frac{\alpha}{4\pi} F_{\mu\nu}^1 F_{\mu\nu}^2 \frac{H}{\eta} \left[\frac{4}{3} N_c Q_t^2 - 7 \right] , \quad (6.23)$$

где первый член в квадратных скобках описывает вклад t -кварка ($N_c = 3, Q_t = 2/3$), второй член – вклад W -бозона. Первый член получается из вклада дираковского фермиона в коэффициент функции Гелл-Манна–Лоу КЭД ($-4/3$) с учетом заряда t -кварка и трех цветовых состояний, в которых он может пребывать. Второй член есть вклад W -бозона в функцию Гелл-Манна–Лоу. Его знак отвечает асимптотической свободе; впервые этот член был вычислен в работе В.С. Ваняшина и М.В. Терентьева 1965 года, посвященной электродинамике заряженных векторных бозонов. В одиннадцатой лекции мы получим число -7.

Для вероятности распада найдем

$$\Gamma_{H \rightarrow \gamma\gamma} = \left(\frac{\alpha}{4\pi} \right)^2 \left(7 - \frac{16}{9} \right)^2 \frac{M_H^3}{16\pi\eta^2} , \quad (6.24)$$

и область применимости полученной формулы – достаточно легкий бозон Хиггса: $(M_H/2m_t)^2 \ll 1, (M_H/2M_W)^2 \ll 1$. Как уже говорилось, первое неравенство справедливо во всей разрешенной в Стандартной Модели области масс $114 \text{ ГэВ} < M_H < 200 \text{ ГэВ}$: точная формула дает мало отличающееся значение для амплитуды с промежуточным t -кварком даже для $M_H = 200 \text{ ГэВ}$. Вклад W -бозона в случае $M_H = 200 \text{ ГэВ}$ сильно отличается от полученного нами, что неудивительно. Однако в наиболее важной для этого распада области $M_H \lesssim 130 \text{ ГэВ}$ вклад W -бозона мало отличается от асимптотического результата, и формула (6.24) достаточно точна.

Задача 7. Получить выражения для вероятностей распадов $H \rightarrow W^+W^-$, $H \rightarrow ZZ$, $H \rightarrow \gamma\gamma$. Изучить предел $M_W, M_Z \rightarrow 0$.

Задача 8. В то время как вероятности распадов заряженных лептонов (μ, τ) и адронов (π^\pm, K, \dots) пропорциональны G_F^2 , вероятности распадов W^\pm, Z и H пропорциональны G_F . В этом смысле говорят, что эти частицы распадаются по “полуслабому” взаимодействию. Большая масса t -кварка ($m_t \approx 175 \text{ ГэВ}$) приводит к тому, что

он также распадается полуслабо; доминирует распад $t \rightarrow Wb$. Найти время жизни t -кварка. Изучить предел $M_W \rightarrow 0$ и связать полученный результат с теоремой эквивалентности.

Измерение M_H на LHC даст ответ на вопрос, является ли электрослабая теория теорией с малыми константами связи (легкий хиггс), или же выход за рамки теории возмущений необходим для ее описания (ТЭВ'ный хиггс).

Л Е К Ц И Я 7

νe -рассеяние, глубоко-неупругое νN -рассеяние, масса нейтрино.

В модели ГВС нейтрино являются безмассовыми частицами, участвующими в слабых взаимодействиях за счет заряженных (обмены W -бозонами) и нейтральных (обмен Z -бозоном) токов. Электронные антинейтрино образуются в реакциях деления (fission), поэтому ядерные реакторы являются источником мощных потоков $\bar{\nu}_e$ (первая регистрация Коуэном и Райнесом в 50-х годах). Электронные нейтрино образуются в реакциях термоядерного синтеза (fusion), обеспечивающих звездную энергетику (солнечные ν_e впервые зарегистрированы в эксперименте Дэвиса, конец 60-х годов). В обоих случаях спектр образуемых нейтрино тянется до нескольких МэВ. При распаде рождающихся на ускорителях π - и K -мезонов образуются пучки ν_μ (либо $\bar{\nu}_\mu$) с характерными энергиями порядка нескольких (иногда десятков) ГэВ; в экспериментах изучаются взаимодействия пучков ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) с мишенями.

Рассмотрим $\nu_\mu e$ -рассеяние за счет нейтрального тока (диаграмма рис. 7.1).

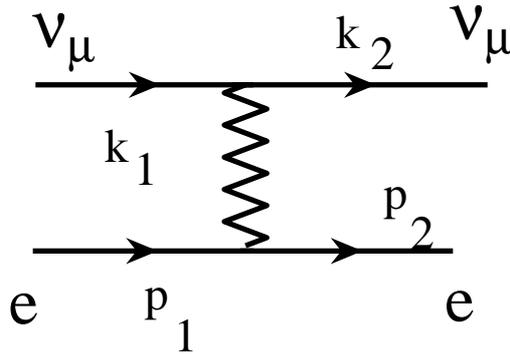


Рис.7.1 Реакция $\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e$.

Амплитуды $Z\nu\nu$ - и Zee -взаимодействий определяются собственными значениями оператора $T_3 - Qs^2$, где $s \equiv \sin \theta$:

$$M_1 = \frac{\bar{g}}{2} \bar{\nu} \gamma_\alpha \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu Z_\alpha \quad , \quad (7.1)$$

$$M_2 = \bar{g} \left[\bar{e} \gamma_\alpha \frac{1 + \gamma_5}{2} e \left(-\frac{1}{2} + s^2 \right) + \bar{e} \gamma_\alpha \frac{1 - \gamma_5}{2} e (s^2) \right] Z_\alpha \quad . \quad (7.2)$$

Из-за того, что s^2 близко к 0.25, векторная связь заряженных лептонов с Z -бозоном подавлена и доминирует аксиальная связь. Для амплитуды $\nu_e e$ -рассеяния получим

$$\begin{aligned} M &= \frac{\bar{g}^2}{2M_Z^2} \bar{\nu} \gamma_\alpha \frac{1+\gamma_5}{2} \nu [g_L \bar{e} \gamma_\alpha \frac{1+\gamma_5}{2} e + g_R \bar{e} \gamma_\alpha \frac{1-\gamma_5}{2} e] = \\ &= 2\sqrt{2} G_F \bar{\nu} \gamma_\alpha \frac{1+\gamma_5}{2} \nu \left[g_L \bar{e} \gamma_\alpha \frac{1+\gamma_5}{2} e + g_R \bar{e} \gamma_\alpha \frac{1-\gamma_5}{2} e \right] , \end{aligned} \quad (7.3)$$

где $g_L = -\frac{1}{2} + s^2, g_R = s^2$. Возводя амплитуду в квадрат и суммируя по конечным и усредняя по начальным спиновым состояниям электрона, имеем

$$\begin{aligned} \langle \Sigma |M|^2 \rangle &= 4G_F^2 S p \hat{k}_2 \gamma_\alpha \hat{k}_1 \gamma_\beta \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \times \\ &\times \left[g_L^2 S p \bar{p}_2 \gamma_\alpha \hat{p}_1 \gamma_\beta \frac{1+\gamma_5}{2} + g_R^2 S p \hat{p}_2 \gamma_\alpha \hat{p}_1 \gamma_\beta \frac{1-\gamma_5}{2} + m^2 g_L g_R S p \gamma_\alpha \gamma_\beta \right] . \end{aligned} \quad (7.4)$$

Вычисляя шпуры γ -матриц, получаем

$$\begin{aligned} \langle \Sigma |M|^2 \rangle &= 16G_F^2 [k_\alpha^2 k_\beta^1 + k_\beta^2 k_\alpha^1 - g_{\alpha\beta} (k_1 k_2) + i\epsilon_{\rho\alpha\sigma\beta} k_\rho^2 k_\sigma^1] \times \\ &\times \{ (g_L^2 + g_R^2) [p_\alpha^2 p_\beta^1 + p_\beta^2 p_\alpha^1 - g_{\alpha\beta} (p_1 p_2)] + 2g_L g_R m^2 g_{\alpha\beta} + (g_L^2 - g_R^2) i\epsilon_{\gamma\alpha\delta\beta} p_\gamma^2 p_\delta^1 \} \\ &= 64G_F^2 [g_L^2 (k_1 p_1)^2 + g_R^2 (k_2 p_1)^2 - m^2 g_L g_R (k_1 k_2)] . \end{aligned} \quad (7.5)$$

Проанализируем полученную формулу в ультрарелятивистском случае. В системе центра инерции первый член дает изотропное рассеяние, второй – анизотропное. Так как падающее нейтрино левое, в случае левого электрона суммарная спиральность начальных частиц равна нулю и процесс рассеяния изотропен в отличие от случая правого электрона, когда суммарная спиральность единица и рассеяние назад запрещено. Интерференция возникает при учете массы электрона. Из общей формулы для сечения рассеяния

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)}{4\sqrt{(p_1 k_1)^2 - m_e^2 m_\nu^2}} \langle \Sigma |M|^2 \rangle > \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \quad (7.6)$$

в с.ц.и. получим

$$d\sigma = \frac{|M|^2}{32\pi s} d\cos\theta , \quad (7.7)$$

где s – переменная Манделстама, $s = (p_1 + k_1)^2 = (p_2 + k_2)^2$. Для полного сечения получаем

$$\sigma = \frac{G_F^2 s}{\pi} \left\{ g_L^2 \left(1 - \frac{m^2}{s}\right)^2 + \frac{1}{3} g_R^2 \left(1 - \frac{m^4}{s^2}\right)^2 \left[1 - \frac{sm^2}{(s+m^2)^2}\right] - \frac{m^2 g_L g_R}{s} \left(1 - \frac{m^2}{s}\right)^2 \right\} . \quad (7.8)$$

Мюонные нейтрино образуются при распадах π - и K -мезонов, поэтому всегда $s \gg m_e^2$. В этом пределе имеем

$$\sigma_{\nu_e e}^{NC} = \frac{G_F^2 s}{\pi} \left(g_L^2 + \frac{1}{3} g_R^2 \right) , \quad (7.9)$$

где NC означает нейтральный ток (Neutral Current) – события без образования мюона.

Другой кросс-канал рассмотренной реакции описывает $\bar{\nu}_\mu e$ -рассеяние. Для перехода в него в квадрате матричного элемента (7.5) следует сделать замены: $k_1 \rightarrow -k_1$, $k_2 \rightarrow -k_2$, при этом импульс входящего антинейтрино равен k_2 , а выходящего – k_1 , т.е. константы g_L и g_R меняются местами. Таким образом, для полного сечения получим

$$\sigma_{\bar{\nu}_\mu e}^{NC} = \frac{G_F^2 s}{\pi} (g_R^2 + \frac{1}{3} g_L^2) . \quad (7.10)$$

Измерение отношения $R = \sigma_{\nu_\mu e}^{NC} / \sigma_{\bar{\nu}_\mu e}^{NC}$ позволяет определить величину электрослабого угла смешивания без неопределенностей, связанных с сильными взаимодействиями.⁴

Противоположный предел $s - m^2 = 2m\omega_\nu \ll m^2$ также интересен, т.к. амплитуды рассеяния реакторных $\bar{\nu}_e$ и солнечных ν_e на нуклонах за счет заряженного тока представимы в форме, аналогичной (7.3). В этом пределе из (7.8) получим

$$\sigma_{\omega_\nu \ll m} = \frac{4}{\pi} G_F^2 \omega_\nu^2 (g_L^2 + g_R^2 - g_L g_R) . \quad (7.11)$$

Так как в нейтринных реакциях нейтрино не детектируется, удобно пользоваться формулой для дифференциального сечения νe -рассеяния в лабораторной системе по кинетической энергии вылетающего электрона. Пользуясь релятивистской инвариантностью сечения, заменим в (7.7) спектр по углу в системе центра на спектр по переменной Манделстама $t = (k_1 - k_2)^2 = (p_1 - p_2)^2$; $dt = 2\omega_\nu^2 d \cos \theta$, $\omega_\nu = (s - m_e^2) / 2\sqrt{s}$. Затем в лабораторной системе запишем: $t = 2m^2 - 2m(T + m)$, где $T = E - m$ – кинетическая энергия электрона отдачи в лабораторной системе. Окончательно получим: $d \cos \theta = \frac{4ms}{(s - m_e^2)^2} dT$, где $s = m_e^2 + 2m_e \omega$, а ω – энергия налетающего нейтрино в лабораторной системе. Для дифференциального сечения по кинетической энергии электрона отдачи из (7.5) и (7.7) получаем

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{2G_F^2 m}{\pi} [g_L^2 + g_R^2 (1 - \frac{T}{\omega})^2 - g_L g_R \frac{mT}{\omega^2}] \quad (7.12)$$

где $0 < T < \omega / (1 + m/2\omega)$.

Сечение взаимодействия нейтрино с нуклонами при высоких энергиях послужило исторически первым местом, откуда было найдено значение электрослабого угла смешивания. Для вычисления полного (инклюзивного) сечения $\nu N \rightarrow lX$, где под X подразумевается произвольное адронное состояние, используется партонная модель. Согласно партонной модели быстро движущийся адрон состоит из “валентных” и “морских” кварков. Вероятность обнаружить u -кварк с импульсом $p = xP$, где P – импульс нуклона, равна $u(x)$. Доля полного импульса нуклона, приходящегося на u -кварки, равна

⁴В случае $\nu_e e$ -рассеяния следует добавить диаграмму с обменом W -бозоном, приведенную к аналогичному (7.3) виду с помощью преобразования Фирца: $\bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) e \bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e = \bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e \bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) e$, где учтена антикоммутация спиноров. Сумма диаграмм приводит к изменению “левой” константы связи: $g_L^e = 1/2 + s^2$, $g_R^e = s^2$.

$U = \int_0^1 xu(x)dx$. Аналогично для других кварков и антикварков. Мы будем рассматривать рассеяние на "изоскалярной" мишени – ядре, содержащем одинаковое число протонов и нейтронов. Для такого ядра $u(x) = d(x)$. Распределение кварков в "море" считается не зависящим от флэйвора: $\bar{u}(x) = \bar{d}(x) = s(x) = \bar{s}(x) = c(x) = \bar{c}(x)$. Поправки на массу c -кварка рассматриваются отдельно. Удобно изучать отношение инклюзивных сечений, вызываемых нейтральными и заряженными токами. Сечение νN -рассеяния за счет заряженного тока равно

$$\sigma_{\nu N}^{CC} = \frac{G_F^2 s}{\pi} [D + S + \frac{1}{3}\bar{U} + \frac{1}{3}\bar{C}] . \quad (7.13)$$

Ниже понадобится также сечение $\bar{\nu}N \rightarrow \mu^+ X$ реакции:

$$\sigma_{\bar{\nu}N}^{CC} = \frac{G_F^2 s}{\pi} [\frac{1}{3}U + \frac{1}{3}C + \bar{D} + \bar{S}] . \quad (7.14)$$

Наконец, для сечения рассеяния нейтрино за счет нейтрального тока имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu N}^{NC} = & \frac{G_F^2 s}{\pi} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}s_W^2 \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}s_W^2 \right)^2 \right] (U + C) + \right. \\ & + \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}s_W^2 \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}s_W^2 \right)^2 \right] (D + S) + \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}s_W^2 \right)^2 + \left(\frac{2}{3}s_W^2 \right)^2 \right] (\bar{U} + \bar{C}) + \\ & \left. \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}s_W^2 \right)^2 + \left(\frac{1}{3}s_W^2 \right)^2 \right] (\bar{D} + \bar{S}) \right\} , \end{aligned} \quad (7.15)$$

где $s_W \equiv \sin \theta_W$.

Для интересующего нас отношения сечений на изоскалярной мишени получим

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\nu N}^{NC}}{\sigma_{\nu N}^{CC}} = & \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}s_W^2 \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}s_W^2 \right)^2 + \left[\left(\frac{2}{3}s_W^2 \right)^2 + \left(\frac{1}{3}s_W^2 \right)^2 \right] r \\ = & \frac{1}{2} - s_W^2 + \frac{5}{9}s_W^4 + \frac{5}{9}s_W^4 r , \end{aligned} \quad (7.16)$$

где $r = \sigma_{\bar{\nu}N}^{CC}/\sigma_{\nu N}^{CC}$. Пренебрегая вкладом морских кварков, получаем $r = 1/3$. Экспериментальное значение $r^{\text{ЭКСП}} \approx 0.4$, используя которое, находим величину $\sin \theta_W$ из измерения отношения (7.16).

Самым замечательным свойством нейтрино является слабость (малость) их взаимодействия. Рассмотрим рожденное в термоядерной реакции в ядре Солнца ν_e с энергией 1 МэВ. Сечение взаимодействия с нуклоном по порядку величины равно (см. ф-лу (7.11)):

$$\sigma_{\nu N} \sim G_F^2 E_\nu^2 \sim 10^{-10} \cdot 10^{-28} \text{ см}^2 \cdot \left(\frac{E_\nu}{m_p} \right)^2 \sim 10^{-44} \text{ см}^2 . \quad (7.17)$$

Беря в качестве средней плотности Солнца $\rho \sim 1 \text{ г/см}^3$, для длины свободного пробега нейтрино будем иметь

$$L_\nu = \frac{1}{\sigma n_N} \sim 10^{20} \text{ см} . \quad (7.18)$$

Так как радиус Солнца равен $7 \cdot 10^{10}$ см, нейтрино пронизывает без рассеяния миллиард солнц! По мере выгорания ядерного топлива звезда сжимается. При уменьшении ее радиуса в $\sqrt{10^9} = 3 \cdot 10^4$ раз, до ~ 10 километров (эти фантастические размеры характеризуют нейтронные звезды) происходит захват нейтрино – свободный вылет прекращается и нейтрино диффундируют к поверхности. Так устроена теплопроводность нейтронной звезды. При коллапсе звезды электроны вжимаются в протоны и происходит нейтронизация: $e^- p \rightarrow \nu_e n$. Образуется нейтронная звезда. Согласно оценкам, такие катастрофы происходят в нашей Галактике примерно раз в десять - сто лет, и на Земле работают нейтринные телескопы, поджидающие очередной коллапс (предыдущий в Большом Магеллановом облаке в 1987 году сопровождался регистрацией нейтрино на Земле).

Задача 9. Учитывая, что энергия образующихся при коллапсе звезды нейтрино $E \sim 100$ МэВ, найти продолжительность нейтринной вспышки сверхновой звезды. Плотность нейтронной звезды – порядка 10^{14} г/см³, ее радиус – около 10 километров.

Свободный вылет нейтрино ответственен за остывание белых карликов, звезд размером с Землю. Из-за большой плотности этих звезд фотонная теплопроводность становится неэффективной.

В течение долгого времени в различных экспериментах ищутся прямые проявления ненулевых масс нейтрино. Суть этих экспериментов проста: ненулевая масса искажает спектр образующихся в распадах заряженных лептонов в области максимальной кинематически доступной энергии. Масса электронных нейтрино должна проявляться в спектре электронов, образующихся в β -распаде ядер. Лучшим кандидатом для анализа является тритий, при β -распаде ядра которого выделяется всего лишь 18 кэВ энергии, распределяемой между $\bar{\nu}_e$ и e . Фазовый объем пропорционален импульсу нейтрино:

$$dN_e \sim \frac{d^3 p_\nu}{E_\nu} \sim \frac{p_\nu^2 dp_\nu}{E_\nu} = \frac{p_\nu E_\nu dE_\nu}{E_\nu} = p_\nu dE_\nu = p_\nu dE_e . \quad (7.19)$$

Если нейтрино безмассово, то зависимость числа событий от энергии электронов в конце спектра (кривая Кюри) имеет вид: $dN_e/dE_e \sim \Delta - E_e$, где Δ – энергосодержание. Для ненулевой массы нейтрино зависимость меняется: $dN_e/dE_e \sim \sqrt{(\Delta - E_e)^2 - m_\nu^2}$. Изучение формы спектра приводит к следующему ограничению: $m_{\nu_e} < 2$ эВ.

Ограничение на майорановскую массу электронного нейтрино следует из поиска безнейтринных двойных β -распадов, $2\beta 0\nu$ -распадов. Это распады ядер, в которых заряд ядра возрастает на две единицы и излучаются два электрона. В каждой четырехфермионной вершине излучается левое нейтрино. Их вылета в конечное состояние можно избежать, если нейтрино описывается майорановским спинором. Соответствующая амплитуда пропорциональна $m_M^{\nu_e}$ (см. рис. 7.2).

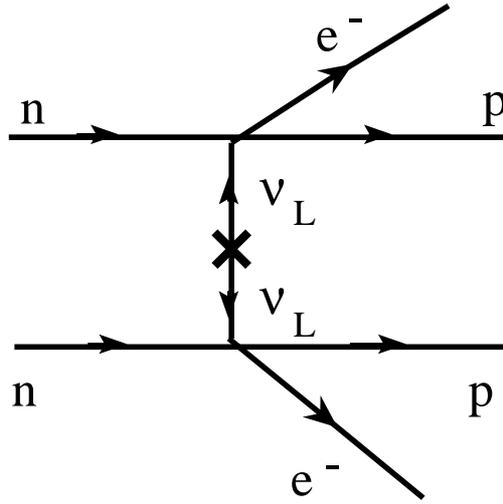


Рис.7.2 Диаграмма, описывающая $2\beta 0\nu$ распад (крестик на нейтринной линии обозначает массовую вставку).

В вычисление верхнего ограничения на массу из нижнего ограничения на период полураспада входят неопределенности, связанные с ядерным матричным элементом. По порядку величины было найдено: $m_M^{\nu_e} \lesssim 1$ эВ.

Задача 10. Нейтринный сигнал от сверхновой SN1987A продолжался около 10 секунд. Расстояние до нее примерно 150 килопарсек. Какое верхнее ограничение на массу нейтрино получается из этих данных (энергия излучаемых электронных нейтрино ~ 10 МэВ).

Ограничение на массу мюонного нейтрино следует из измерения импульсов мюонов, образуемых при распадах покоящихся π -мезонов $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$: $m_{\nu_\mu} < 190$ КэВ. Наконец, ограничение на массу ν_τ следует из анализа распадов τ -лептона, $m_{\nu_\tau} < 20$ МэВ.

Экспериментальное открытие нейтринных осцилляций свидетельствует о том, что у нейтрино есть масса. Длины осцилляций определяются разностями квадратов масс нейтрино. Оказалось, что эти разности очень малы, много меньше $(1 \text{ эВ})^2$ (см. лекцию 8). Учитывая прямое ограничение на массу электронного нейтрино из β -распада трития, мы приходим к заключению, что масса каждого из трех массовых состояний нейтрино не превышает 2 эВ. Наша следующая цель – обсудить, каким образом массивные нейтрино могут быть включены в Стандартную Модель.

Самый простой способ – дать нейтрино массу таким же образом, как она дается заряженным лептонам и кваркам. Для этого в Стандартную Модель следует добавить три правых нейтрино и дописать в лагранжиан члены юкавского взаимодействия правых нейтрино с хиггсовским дублетом H и дублетами левых лептонов L_i . Такие массы

называются дираковскими. Очевидный недостаток – для получения легких нейтрино юкавские константы связи должны быть очень малы, $f_\nu \lesssim 10^{-11}$, что кажется чрезвычайно искусственным, ненатуральным. Другой недостаток – мы потеряем требование электронейтральности нейтрино из отсутствия аномалий. Отсутствие электрического заряда у нейтрино делает возможным другой тип массы, называемый майорановским.

Теоретический анализ начнем с феноменологического рассмотрения, а затем перейдем к модели ГВС. Для электрона Дирака массовый член в лагранжиане имеет следующий вид: $m_e \bar{\Psi} \Psi \equiv m_e [\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L]$, поэтому, на первый взгляд, для генерации ненулевой массы нужны два вейлевских спинора, Ψ_L и Ψ_R . На самом деле это не так. Лоренц-инвариантный массовый член пишется и для одного спинора. Напомним, что при преобразованиях Лоренца биспинор Ψ и зарядово-сопряженный биспинор $\Psi^c \equiv C \bar{\Psi}$, где C – матрица зарядового сопряжения ($C = \gamma_0 \gamma_2$ в используемом нами стандартном представлении γ -матриц), преобразуются одинаковым образом. Так же одинаково преобразуются биспиноры $\bar{\Psi}$ и $\bar{\Psi}^c$. Поэтому Лоренц-инвариантность не запрещает введения еще одного массового члена: $\tilde{m}_e [\bar{\Psi} \Psi^c + \text{компл.сопр.}] \equiv \tilde{m}_e [\bar{\Psi} C \bar{\Psi} + \Psi C^+ \Psi]$. Такой член запрещен законом сохранения заряда, и поэтому в квантовой электродинамике он не рассматривается. Нейтрино – нейтральная частица, что открывает дополнительные возможности для формы массового члена. Пусть у нас имеется одно левое нейтрино. Дираковский массовый член для такого поля не может быть введен: $m_D \bar{\nu}_L \nu_L \equiv 0$. Тем не менее, массу ввести можно: $m_L [\bar{\nu}_L \nu_L^c + \text{компл.сопр.}] = m_L [\bar{\nu}_L C \bar{\nu}_L + \nu_L C^+ \nu_L]$. Эту теорию удобно переписать, вводя майорановский спинор $\nu_M = \nu_L + \nu_L^c \equiv \nu_L + C \bar{\nu}_L$, переходящий при зарядовом сопряжении в самого себя. Если γ -матрицы выбираются в представлении Майорана (то есть вещественными), то $C = \gamma_0$ и $\nu_M = \nu_L + \nu_L^c$ становится вещественным.

Свободный лагранжиан имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \bar{\nu}_M \hat{\partial} \nu_M + \frac{1}{2} m_L \bar{\nu}_M \nu_M \quad (7.20)$$

Майорановский спинор описывает истинно нейтральную частицу - отсюда коэффициенты $1/2$. Левая компонента ν_M – нейтрино, правая – антинейтрино. Если в лагранжиан SM наряду с левым нейтрино вводится дополнительное поле – правое синглетное нейтрино, то возможно введение трех массовых членов: левого и правого майорановских и дираковского:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} m_L \bar{\nu}_L C \bar{\nu}_L + \frac{1}{2} m_R \bar{\nu}_R C \bar{\nu}_R + m_D \bar{\nu}_L \nu_R + \text{компл.сопр.} \quad (7.21)$$

Диагонализуя массовую матрицу, можно найти два собственных состояния с определенными массами. Это майорановские нейтрино. В частном случае $m_L = m_R = 0$ приходим к одному дираковскому нейтрино. Наличие трех семейств заменяет числа m_L , m_R и m_D на матрицы 3×3 .

Перейдем к электрослабой теории и начнем с минимального случая – одно левое нейтрино на каждое поколение. Майорановский массовый член для левого нейтрино нарушает калибровочную $SU(2) \times U(1)$ -симметрию. Его введение возможно за счет расширения хиггсовского сектора. Вводя триплетное скалярное поле $\vec{\Phi}_i$, мы получаем возможность включить в лагранжиан следующий член:

$$\mathcal{L} = \lambda \bar{L} i \sigma_2 \vec{T} C \bar{L} \vec{\Phi} + \text{к.с.} \quad (7.22)$$

Выпадение нейтральной компоненты Φ_i в осадок генерирует майорановскую массу левого нейтрино. При этом происходит спонтанное нарушение глобальной $U(1)$ -симметрии, обеспечивающей сохранение лептонного заряда, и возникает голдстоуновский бозон, а также массивный скаляр φ , $m_\varphi \lesssim \langle \Phi_0 \rangle$. Выпадение в вакуум компоненты триплета меняет соотношение $M_W = M_Z \cos \theta$, хорошо проверенное на эксперименте. Отсюда возникает требование $\langle \Phi_0 \rangle \ll \eta$, и нейтральный скаляр имеет маленькую массу. Распад Z -бозона на голдстоун и его скалярного партнера φ увеличивает невидимую ширину Z , что исключает рассматриваемый механизм, во всяком случае в его простейшем варианте.

Другой способ – дать триплету $\vec{\Phi}_i$ положительный квадрат массы и включить его взаимодействие с хиггсовским дублетом:

$$\Delta \mathcal{L} = -M^2 |\vec{\Phi}|^2 + \mu H i \sigma_2 \vec{T} H \vec{\Phi} + \text{к.с.} \quad (7.23)$$

Ненулевое вакуумное среднее H приводит к возникновению массы нейтрино $m_\nu \sim \mu(\eta/M)^2$, и ее малость объясняется большой величиной M , либо малой величиной μ .

Данный способ генерации массы нейтрино получил название “see-saw” (качели). В другом варианте see-saw хиггсовский триплет не вводится, а модель ГВС расширяется за счет введения правого нейтрино. Массовая матрица нейтрино содержит дираковскую массу, которую естественно полагать того же порядка величины, что и массы заряженных лептонов. Легкость нейтрино связана с большой величиной майорановской массы правого нейтрино. Так как правое нейтрино синглетно относительно $SU(2) \times U(1)$ взаимодействий, его майорановская масса может быть непосредственно включена в лагранжиан.

Массовая матрица нейтрино имеет следующий вид:

$$(\overline{\nu_L \nu_R^c}) \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

и в пределе $m_R \gg m_D$ ее собственные значения равны:

$$m_{\nu_1} = \frac{m_D^2}{m_R}, \quad m_{\nu_2} = m_R. \quad (7.25)$$

Собственными функциями являются два майорановских нейтрино. Первое состоит в основном из ν_L , второе – из ν_R . Массы нейтрино определяются никак не связанным с электрослабой шкалой значением m_R . Если $m_D \sim 1$ ГэВ, то $m_R \sim 10^9$ ГэВ приведут к $m_{\nu_1} \sim 1$ эВ. Большие значения m_R приводят к более легким нейтрино.

В заключение поговорим о магнитных моментах нейтрино.

Когда в 1930 году Вольфганг Паули изобрел нейтрино для спасения закона сохранения энергии в β -распаде ядер, он предсказал, что эта нейтральная частица будет обнаружена по ионизации, вызванной ее магнитным моментом. Э.Майорана построил теорию истинно нейтрального спинорного поля, в которой частица совпадает со своей античастицей. Магнитный момент майорановского нейтрино (как и заряд) тождественно равен нулю. Но если даже нейтрино описывается майорановским спинором, то сейчас мы знаем, что имеется 3 сорта нейтрино, поэтому оператор магнитного момента может быть построен – в майорановском случае он должен приводить к изменению сорта нейтрино. В случае дираковского нейтрино магнитный момент в модели ГВС возникает на однопетлевом уровне. Соответствующие диаграммы приведены на рис. 7.3.

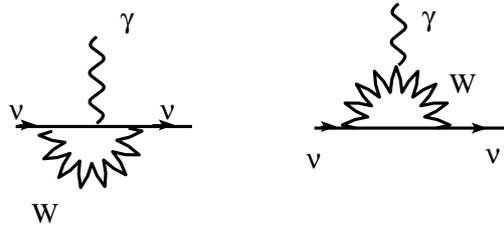


Рис.7.3 Диаграммы, генерирующие магнитный момент нейтрино в модели ГВС.

Оператор магнитного момента $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$ приводит к перевороту киральности фермиона. Так как W -бозон взаимодействует только с левыми токами, переворот киральности происходит на внешней нейтринной линии и поэтому пропорционален массе нейтрино. Приведем результат вычисления:

$$\mu_\nu = \frac{3eG_F m_\nu}{8\pi^2\sqrt{2}} = 3 \cdot 10^{-10} \frac{m_\nu}{m_p} \mu_B, \quad (7.26)$$

где $\mu_B = e/2m_e$ – магнетон Бора. Для электронного нейтрино с массой ~ 0.3 эВ магнитный момент оказывается порядка $10^{-19} \mu_B$. Экспериментально магнитный момент ν_e ищется по отклонению дифференциального сечения νe -рассеяния от предсказываемого формулой (7.12). Отклонение возникает за счет однофотонного обмена между нейтрино и электроном, которое добавляет к (7.12) следующий член:

$$\Delta\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_\mu = \alpha\mu_\nu^2\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\omega}\right), \quad (7.27)$$

поэтому для получения хорошего ограничения на μ_ν требуется низкая энергия электронов отдачи. Из опытов с реакторными $\bar{\nu}_e$ получено

$$(\mu_{\nu_e})_{\text{экс}} \lesssim 3 \cdot 10^{-11} \mu_B, \quad (7.28)$$

что на много порядков больше предсказания СМ с дираковским нейтрино. Существуют расширения Стандартной Модели, в которых магнитный момент нейтрино пропорционален массе заряженного лептона. В таких моделях μ_ν достигает близких к экспериментальному ограничению (7.28) значений.

Задача 11. В годы активного Солнца рождающиеся в ядре Солнца электронные нейтрино пролетают через поперечное магнитное поле конвективной зоны Солнца, имеющей ширину $\approx 2 \cdot 10^{10}$ см. Магнитное поле в конвективной зоне в период максимальной солнечной активности может быть порядка 10 килोगаусс. Считая, что магнитный момент нейтрино близок к верхнему экспериментальному ограничению (7.28), определить, как сильно может подавляться поток левых электронных нейтрино в годы активного Солнца (Волошин, Высоцкий).

Л Е К Ц И Я 8

Осцилляции нейтрино, осцилляции ν_e – эксперимент KamLAND, солнечные нейтрино, влияние вещества, осцилляции $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ – атмосферные нейтрино, ускорительные эксперименты, случай трех нейтрино (матрица PMNS).

Наличие у нейтрино ненулевых масс приводит к красивому квантовомеханическому эффекту – осцилляциям нейтрино. Необходимым для наличия осцилляций условием является отличие от нуля недиагонального (в токовом базисе) массового члена нейтрино. При этом образуемое в слабом распаде нейтрино является суперпозицией состояний с определенными массами. Каждое массовое состояние распространяется как плоская волна, разность фазовых скоростей которых приводит к осцилляциям токовых состояний. Получим необходимые формулы для случая двух сортов нейтрино. Рождаемые заряженным слабым током (вместе с электроном) нейтрино ν_e и (вместе с мюоном) нейтрино ν_μ следующим образом связаны с состояниями с определенными массами $m_1(\nu_1)$ и $m_2(\nu_2)$:

$$\nu_e = \nu_1 \cos \theta + \nu_2 \sin \theta \quad , \quad (8.1)$$

$$\nu_\mu = -\nu_1 \sin \theta + \nu_2 \cos \theta \quad ,$$

где θ – угол смешивания нейтрино, аналогичный углу Кабиббо для случая кварков.

При β -распаде ядра рождается электронное нейтрино ν_e . Пространственно-временная картина описывается распространением суперпозиции двух плоских волн:

$$\nu(x, t) = \cos \theta \nu_1 e^{-iE_1 t + iP_1 x} + \sin \theta \nu_2 e^{-iE_2 t + iP_2 x} \quad , \quad (8.2)$$

где $E_1^2 - P_1^2 = m_1^2$, $E_2^2 - P_2^2 = m_2^2$. Для выполнения граничного условия $\nu(0, t) = \nu_e$ (предположено, что распадающееся ядро расположено в начале координат) необходимо, чтобы энергии были равны: $E_1 = E_2 \equiv E$. Амплитуда вероятности того, что на расстоянии x от точки распада находится ν_e , равна

$$\begin{aligned} A_{\nu_e \nu_e} &= \langle \cos \theta \nu_1 + \sin \theta \nu_2 | \cos \theta \nu_1 + \sin \theta \nu_2 e^{i(P_2 - P_1)x} \rangle \times \\ &\times e^{-iEt + iP_1 x} = [c^2 + s^2 e^{i(P_2 - P_1)x}] e^{-iEt + iP_1 x} \quad , \end{aligned} \quad (8.3)$$

где $c \equiv \cos \theta$, $s \equiv \sin \theta$.

Квадрируя амплитуду (8.3), с учетом равенства $P_1 - P_2 = (m_2^2 - m_1^2)/2E \equiv (\Delta m^2)/2E$, получим вероятность обнаружить электронное нейтрино на расстоянии x от места его рождения:

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \nu_e} &= |A_{\nu_e \nu_e}|^2 = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos x \frac{\Delta m^2}{2E} \\ &= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2}{4E} x \right) \quad . \end{aligned} \quad (8.4)$$

Вероятность обнаружить мюонное нейтрино равна

$$P_{\nu_\mu\nu_e} = 1 - P_{\nu_e\nu_e} = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E}x\right) . \quad (8.5)$$

Глубина осцилляций определяется величиной угла смешивания θ , она максимальна при наибольшем смешивании, $\theta = \pi/4$. Длиной осцилляции называется расстояние, на котором нейтрино возвращается в исходное состояние, $l_\nu = \frac{4\pi E}{\Delta m^2}$. Поиск осцилляций осуществляется в экспериментах по “исчезновению” и “появлению”. В первых ищется уменьшение первоначального потока нейтрино. Классический пример – детектирование реакторных $\bar{\nu}_e$ по реакции обратного β -распада. Во вторых – появление нового нейтрино, скажем, ν_τ , в ускорительных экспериментах.

Для определения значений разностей квадратов масс нейтрино, к которым чувствительны различные эксперименты, удобно соотношение

$$\frac{\Delta m^2}{4E}x = 1.27 \frac{\Delta m^2(\text{эВ}^2)}{E(\text{МэВ})}x(\text{м}) . \quad (8.6)$$

В первоначальных реакторных экспериментах расстояние от активной зоны реактора до детектора измерялось десятками метров. При энергиях реакторных $\bar{\nu}_e$ несколько МэВ эти эксперименты были чувствительны к $|\Delta m^2| \gtrsim 10^{-1}$ эВ². В ускорительных экспериментах ищутся осцилляции мюонных (анти)нейтрино, характерные энергии которых превышают 1 ГэВ. В первых экспериментах расстояния от точки рождения нейтрино в распадах π - и K -мезонов до детектора измерялось километрами. Тем самым осцилляции могли быть обнаружены при $\Delta m^2 \gtrsim 1$ эВ². Отрицательные результаты ускорительных и реакторных экспериментов “первого поколения” показывали, что малы либо Δm^2 , либо углы смешивания нейтрино.

Реакторный эксперимент KamLAND обнаружил осцилляции $\bar{\nu}_e$ (первая публикация в 2005 году), измеряя поток антинейтрино с большого количества атомных станций, расположенных на расстоянии ≈ 180 км от детектора. Четко видны два периода осцилляций в зависимости $P_{\bar{\nu}_e\bar{\nu}_e}$ от $1/E_{\bar{\nu}_e}$, что позволяет с высокой точностью измерить разность квадратов масс нейтрино:

$$\Delta m_{21}^2 = (8.0 \pm 0.3) \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2 . \quad (8.7)$$

Угол смешивания нейтрино оказался большим, $\theta_{12} \approx 45^\circ$. Результат KamLAND подтвердил наличие осцилляций $\bar{\nu}_e$ в земном эксперименте; первое же указание на наличие осцилляций дал эксперимент Дэвиса, изучавший поток образующихся на Солнце в ходе термоядерных реакций электронных нейтрино. Это так называемый радиохимический эксперимент. Детектор состоит из содержащего хлор вещества, в котором за счет реакции $^{37}\text{Cl} + \nu_e = ^{37}\text{Ar} + e^-$ образуется аргон. Для подавления фона космических лучей детектор находится в шахте. Основная реакция, производящая энергию в Солнце, $pp \rightarrow De^+\nu_e$, приводит к потоку нейтрино на поверхности Земли $\sim 10^{10}$ [сек·см²]⁻¹,

но энергии этих нейтрино (т.н. pp -нейтрино) слишком малы, $E \lesssim 0.4$ МэВ, в то время как порог хлорной реакции ≈ 0.8 МэВ. Нейтрино более высоких энергий также образуются в цепочках идущих на Солнце реакций, но их потоки значительно меньше. Скажем, поток образующихся в распаде бора и дающих основной вклад в хлорную реакцию “борных” нейтрино $\sim 10^6$ [сек·см²]⁻¹; их энергия достигает 14 МэВ. Беря для сечения образования аргона величину 10^{-42} см², найдем, что с одним ядром хлора это превращение произойдет за 10^{36} сек, что в пересчете на 600 тонн детектора Дэвиса дает одно событие за 10^5 сек ≈ 1 сутки. Образующийся аргон радиоактивен и распадается примерно за месяц. Поэтому раз в два месяца он извлекался из детектора и подсчитывалось число атомов аргона – их оказывалось порядка десяти штук, в три раза меньше предсказанного теоретически. Эта проблема существовала начиная с начала 70-х годов прошлого века и получила название дефицита солнечных нейтрино. Ее естественным разрешением было предположение об осцилляции ν_e на их пути от Солнца до Земли, т.к. образующиеся ν_μ в эксперименте Дэвиса стерильны – их энергии недостаточно для рождения мюона. Но в это решение мало кто верил, т.к. нейтрино считались строго безмассовыми. Сомневались в достоверности эксперимента, в возможности извлечь десяток атомов аргона из шестисоттонного детектора и не ошибиться при этом в разы. Наконец, сомневались в надежности вычисления потока борных нейтрино от Солнца, проделанного Джоном Бакалом: в отличие от pp -нейтрино, источником борных нейтрино являются реакции, дающие пренебрежимый вклад в солнечную энергетику.

Следующим шагом в исследовании солнечных нейтрино явилась регистрация реакции рассеяния $\nu_e e \rightarrow \nu_e e$ в детекторе Камиоканда в конце 80-х годов. Порог регистрации этой реакции – около 5 МэВ, что еще больше, чем порог хлорного детектора. В отличие от радиохимического эксперимента, в случае рассеяния на электроне восстанавливается направление, откуда прилетело нейтрино. И это оказалось направлением на Солнце. Зафиксированный поток ν_e примерно в два раза меньше предсказанного, что также указывало на осцилляции нейтрино. В реакцию рассеяния наряду с заряженным дает вклад и нейтральный ток, поэтому здесь в отличие от радиохимического эксперимента мюонные нейтрино не стерильны. Сечение $\nu_\mu e$ -рассеяния примерно в семь раз меньше сечения $\nu_e e$ -рассеяния, т.е. осцилляции $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ приводят к уменьшению числа рассеяний, наблюдаемому в детекторе.

В начале 90-х годов начали работать два галиевых детектора, ищущих образование германия под действием солнечных нейтрино: SAGE (советско-американский галиевый эксперимент на Баксане) и GALLEX (европейский эксперимент в лаборатории Гран-Сассо, Италия). Ценность этих экспериментов определяется низким порогом реакции, $E_{th} \approx 200$ кэВ, благодаря чему примерно половина германия образуется pp -нейтрино, поток которых вычисляется надежно. Обнаруженный недостаток нейтрино послужил дополнительным аргументом в пользу дефицита солнечных нейтрино и в пользу осцил-

ляций нейтрино.

Исключительно важным оказался следующий по времени детектор солнечных нейтрино, построенный в Канаде, в Нейтринной Обсерватории Садбери (SNO, первые публикации в 2001 году) и использующий в качестве рабочего вещества тяжелую воду. Измеряется поток высокоэнергичных борных нейтрино. Солнечные нейтрино детектируются по трем реакциям:

$$\begin{aligned}\nu + d &\rightarrow e^- + p + p \ , \\ \nu + d &\rightarrow \nu + p + n \ , \\ \nu + e^- &\rightarrow \nu + e^- ,\end{aligned}$$

в первую из которых дают вклад только электронные нейтрино, во вторую, идущую за счет нейтральных токов, одинаковый вклад дают все три типа нейтрино, а в последней доминирует вклад электронных нейтрино. Оказалось, что суммарный поток нейтрино, измеряемый по второй реакции, совпадает с предсказанным в солнечной модели; поток же электронных нейтрино (первая и третья реакции) испытывает дефицит

$$\frac{\Phi(\nu_e)}{\Phi(\nu_e) + \Phi(\nu_{\mu,\tau})} = 0.34 \pm 0.04 \ . \quad (8.8)$$

Результаты SNO подтверждают надежность вычисления потока борных нейтрино от Солнца и показывают, что электронные нейтрино превращаются в ν_μ и/или ν_τ на своем пути к Земле.

Отношение (8.8) в случае осцилляции между двумя типами нейтрино в вакууме дается формулой (8.4) (присутствие третьего нейтрино ν_3 не важно в силу малости угла смешивания θ_{13} , см. ниже). Термоядерные реакции идут в центральной области Солнца, радиус которой $\approx 10^{10}$ см. С учетом (8.6) и (8.7) аргумент второго квадрата синуса в (8.4) меняется на $10^4/E(\text{МэВ})$ при перемещении по ядру Солнца, что ведет к усреднению и замене $\sin^2(\Delta m^2 x/(4E))$ на $1/2$:

$$P_{\nu_e\nu_e} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \ . \quad (8.9)$$

Поэтому максимальное подавление потока электронных нейтрино от Солнца равно 0.5, что противоречит результату SNO (8.8).

Учет влияния вещества на осцилляции нейтрино разрешает противоречие. Сечение взаимодействия Мэвных нейтрино с веществом исключительно мало, однако в рассеяние на угол ноль дает когерентный вклад каждое взаимодействие нейтрино с электронами и ядрами, встречающимися на его пути. Это приводит к набегу фазы волновой функции, что изменяет осцилляционную картину.

Разность фаз ν_e и ν_μ возникает за счет $\nu_e e$ -рассеяния, вызванного заряженным током (нейтральные токи ν_e и ν_μ одинаковы и в разность фаз вклада не вносят). Описывающий

заряженный ток гамильтониан имеет следующий вид:

$$H = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) e \bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e \bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) e , \quad (8.10)$$

где использовано преобразование Фирца. Усредняя гамильтониан по среде, получим

$$\langle H \rangle = \sqrt{2} G_F \bar{\nu}_L^e \gamma_0 \nu_L^e n_e , \quad (8.11)$$

где n_e – плотность электронов в среде. Это взаимодействие должно быть учтено вместе с членами $\sim \Delta m^2/E$, описывающими осцилляции в вакууме. В результате собственные состояния могут раздвинуться, что ведет к подавлению осцилляций в среде (Вольфенштейн), а могут и сблизиться. Возможно также пересечение уровней при движении нейтрино в среде с переменной плотностью, ведущее к резонансному усилению осцилляций (Михеев, Смирнов). Отметим, что при переходе от нейтрино к антинейтрино отвечающий за взаимодействие с материей член в гамильтониане меняет знак.

Гамильтониан, описывающий распространение нейтрино в среде, в базисе (ν_e, ν_μ) имеет вид:

$$\hat{H} = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} G_F n_e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (8.12)$$

где θ – угол смешивания нейтрино в вакууме, $\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$, и мы вычли не влияющий на осцилляции член, пропорциональный единичной матрице. Эволюция по времени, описываемая гамильтонианом \hat{H} , является одновременно эволюцией в пространстве (для ультрарелятивистского нейтрино $t = x$).

Разность собственных значений \hat{H} , определяющая длину осцилляций в веществе, равна

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \sqrt{\left(\frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta - \sqrt{2} G_F n_e \right)^2 + \left(\frac{\Delta m^2}{2E} \sin 2\theta \right)^2} . \quad (8.13)$$

Угол смешивания в веществе определяется равенством

$$\sin^2 2\theta_m = \frac{\sin^2 2\theta}{\left(\cos 2\theta - \frac{2\sqrt{2} G_F n_e E}{\Delta m^2} \right)^2 + \sin^2 2\theta} . \quad (8.14)$$

Положим по определению $|\theta| < 45^\circ$, тем самым в ν_e доминирует ν_1 . В зависимости от знака Δm^2 возможны два случая: при $\Delta m^2 < 0$ угол смешивания в материи меньше, чем в вакууме – материя подавляет осцилляции нейтрино; при $\Delta m^2 > 0$ осцилляции в материи усилены и, в частности, даже при малом θ угол смешивания в материи может достигать 45° . Именно усиление осцилляций в Солнце позволяет объяснить наблюдаемое аномально большое подавление потока солнечных ν_e . Очень важным при этом оказывается уменьшение плотности электронов вдоль траектории нейтрино.

Задача 12. Получить формулы (8.13) и (8.14), описывающие разность собственных значений и угол смешивания нейтрино в веществе с постоянной плотностью.

Плотность материи в ядре Солнца ≈ 100 гр/см³, что дает $\sqrt{2}G_F n_e \approx 10^{-5}$ эв²/МэВ. При $|\Delta m^2| = 8 \cdot 10^{-5}$ эв² находим, что вакуумные члены в \hat{H} меньше эффекта среды при $E > 2$ МэВ, т.е. для бóльшей части спектра борных нейтрино. Т.о. рождающееся ν_e является одновременно с хорошей точностью собственным состоянием гамильтониана в центре Солнца, отвечающим бóльшему собственному значению. Длина осцилляции нейтрино $l_\nu = 2\pi/(\sqrt{2}G_F n_e) \approx 100$ километров, что намного меньше характерных расстояний, на которых изменяется плотность Солнца ($\sim 10^9 \div 10^{10}$ см). В этих условиях осцилляции являются адиабатическими: движущееся к поверхности Солнца нейтрино продолжает принадлежать большему собственному значению, величина которого уменьшается с уменьшением плотности. Если бы мы имели $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2 < 0$, то из Солнца вышло бы нейтрино ν_1 , которое, будучи состоянием с определенной массой в вакууме, достигло бы Земли без осцилляций. В земном детекторе оно бы вело себя как ν_e с вероятностью $\cos^2 \theta$, и подавление не превышало бы 0.5. Поэтому следует считать, что $\Delta m^2 > 0$, и при резонансной плотности $\sqrt{2}G_F n_e^{\text{рез}} = \Delta m^2 \cos 2\theta / (2E)$ происходит максимальное сближение уровней, а угол смешивания достигает 45° . Из Солнца вылетает состояние, имеющее бóльшее собственное значение – и это ν_2 (см. рис 8.1). Достигая без осцилляций Земли, оно ведет себя в детекторе как ν_e с вероятностью $\sin^2 \theta$. Из результата SNO (8.8) для получившего название солнечного угла смешивания нейтрино получим

$$\theta_\odot = 35^\circ \pm 3^\circ . \quad (8.15)$$

Перейдем к атмосферным нейтрино. Космические лучи состоят в основном из протонов. Сталкиваясь с ядрами атмосферы Земли, протоны рождают π - и K -мезоны, среди конечных продуктов распада которых имеются нейтрино. Каскады $\pi \rightarrow \mu\nu_\mu \rightarrow e\nu_e\nu_\mu\nu_\mu$, $K \rightarrow \mu\nu_\mu \rightarrow e\nu_e\nu_\mu\nu_\mu$ приводят к образованию двух мюонных нейтрино на каждое электронное нейтрино, в то время как в наблюдениях это отношение оказывалось близким к единице (распады $\pi, K \rightarrow e\nu_e$ подавлены по сравнению с распадами на $\mu\nu_\mu$ множителем m_e в амплитуде, возникающим из-за переворота спиральности).

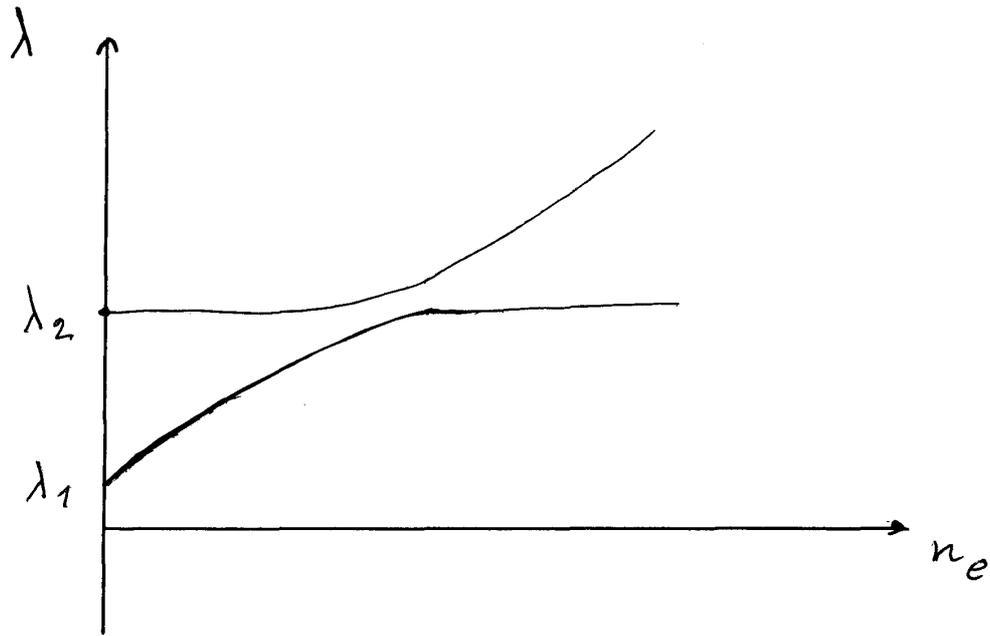


Рис. 8.1 Эволюция собственных состояний при движении нейтрино из ядра к поверхности Солнца.

Наиболее убедительными оказались результаты детектора Super Kamiokanda, опубликованные в 1998 году. Оказалось, что недостаток испытывает поток мюонных нейтрино, идущих “вверх”, то есть прошедших после своего образования около 1000 км и больше, в то время как для идущих “вниз” нейтрино, прошедших гораздо меньший путь, отношение 2:1 выполняется. Поток электронных нейтрино “вверх” и “вниз” одинаков и совпадает с ожидаемым. Поэтому для объяснения недостатка мюонных нейтрино осцилляциями следует привлечь ν_τ . Зависимость потока ν_μ от азимутального угла позволяет получить зависимость потока от расстояния, проходимого нейтрино от рождения в верхних слоях атмосферы до детектора, и найти по формуле (8.4) разность квадратов масс и угол смешивания:

$$1.9 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2 < |\Delta m_{23}^2| < 3 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2 , \quad (8.16)$$

$$\theta_{23} = 45^\circ \pm 4^\circ . \quad (8.17)$$

Для проверки полученных результатов в Японии был осуществлен эксперимент K2K: полученный на протонном ускорителе в лаборатории КЕК пучок мюонных нейтрино регистрировался в удаленном на 250 км детекторе Super Kamiokanda. Первая публикация 2003 года подтвердила недостаток мюонных нейтрино. Согласно данным

детектора, установленного около ускорителя, в детекторе Super K должно было наблюдаться 160 ± 15 событий; наблюдалось лишь 112 событий. Численные значения параметров (8.16) и (8.17) хорошо описывают полученный результат, а зависимость числа событий от энергии подтверждает осцилляционную формулу.

Задача 13. Сравнить осцилляцию нейтрино, образующихся в распадах π -мезонов (реальный эксперимент) и W -бозонов (мысленный эксперимент).

Эксперимент MINOS использует пучок мюонных нейтрино, рожденных в лаборатории Ферми (Батавия), для рождения мюонов в детекторе, находящемся на расстоянии 700 км в шахте на севере штата Миннесота. В этом эксперименте с хорошей точностью измерена разность квадратов масс осциллирующих состояний

$$|\Delta m_{23}^2| = (2.4 \pm 0.1) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2 . \quad (8.18)$$

Рассмотренные ускорительные эксперименты изучают “исчезновение” мюонных нейтрино. В 2008 году начал набор статистики эксперимент OPERA – рождаемые в ЦЕРН’е мюонные нейтрино взаимодействуют в находящемся в лаборатории Гран Сассо детекторе. Наряду с уменьшением потока ν_μ должно быть обнаружено рождение тау-лептонов, источником которых служат ν_τ , появившиеся за счет $\nu_\mu - \nu_\tau$ осцилляций. OPERA – эксперимент по “появлению” ν_τ за счет осцилляций.

При рассмотрении осцилляций нейтрино мы ограничивались рассмотрением двух смешивающихся состояний. Необходимо обобщить анализ на случай трех имеющихся нейтрино. Это даст возможность обсудить дополнительные параметры смешивания и объяснить, почему удавалось ограничиваться случаем смешивания двух состояний при анализе осцилляций реакторных, солнечных, атмосферных и ускорительных нейтрино.

В полной аналогии с кварками начинать следует с не имеющих определенной массы состояний заряженных лептонов l' и нейтрино ν' , в которых записывается исходный лагранжиан. Массовая матрица заряженных лептонов диагонализуется унитарными матрицами E_L и E_R . Если нейтрино дираковское, то их массовая матрица диагонализуется унитарными матрицами N_L и N_R . В случае майорановских нейтрино массовая матрица симметрична, и она диагонализуется одной ортогональной матрицей N . В обоих случаях после перехода к состояниям, имеющим определенную массу, лагранжиан, описывающий заряженные токи лептонов, имеет вид

$$\mathcal{L}_W = \bar{l}_L U \gamma_\mu \nu_L W_\mu , \quad (8.19)$$

где $l_L \equiv (e, \mu, \tau)_L$, $\nu_L \equiv (\nu_1, \nu_2, \nu_3)_L$, а матрица U , аналогичная матрице СКМ смешивания кварков, получила название матрицы PMNS в честь впервые рассмотревшего смешивание нейтрино Понтекорво (1957 г.) и сделавших это несколько позднее Маки, Накагавы и Сакаты.

В случае дираковских нейтрино рассмотрение числа параметров матрицы СКМ, проделанное в лекции 4, справедливо и для матрицы PMNS. Широко используется следующая параметризация этих матриц:

$$\begin{aligned}
V_{\text{СКМ}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{c}_{23} & \tilde{s}_{23} \\ 0 & -\tilde{s}_{23} & \tilde{c}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_{13} & 0 & \tilde{s}_{13}e^{-i\tilde{\delta}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tilde{s}_{13}e^{i\tilde{\delta}} & 0 & \tilde{c}_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_2 & \tilde{s}_{12} & 0 \\ -\tilde{s}_{12} & \tilde{c}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{c}_{12}\tilde{c}_{13} & \tilde{s}_{12}\tilde{c}_{13} & \tilde{s}_{13}e^{-i\tilde{\delta}} \\ -\tilde{s}_{12}\tilde{c}_{23} - \tilde{c}_{12}\tilde{s}_{23}\tilde{s}_{13}e^{i\tilde{\delta}} & \tilde{c}_{12}\tilde{c}_{23} - \tilde{s}_{12}\tilde{s}_{23}\tilde{s}_{13}e^{i\tilde{\delta}} & \tilde{s}_{23}\tilde{c}_{13} \\ \tilde{s}_{12}\tilde{s}_{23} - \tilde{c}_{12}\tilde{c}_{23}\tilde{s}_{13}e^{i\tilde{\delta}} & -\tilde{c}_{12}\tilde{s}_{23} - \tilde{s}_{12}\tilde{c}_{23}\tilde{s}_{13}e^{i\tilde{\delta}} & \tilde{c}_{13}\tilde{c}_{23} \end{pmatrix}, \quad (8.20)
\end{aligned}$$

где $\tilde{c}_{12} \equiv \cos \tilde{\theta}_{12}$, $\tilde{s}_{12} \equiv \sin \tilde{\theta}_{12}$, и мы ввели значок “ \sim ” для параметров смешивания кварков, зарезервировав для лептонов те же обозначения, но без “ \sim ”.

Матрица U_{PMNS} имеет такой же вид, но значения углов смешивания и фаза отличаются от случая кварков. В кварковом случае диагональные элементы матрицы смешивания близки к единице – переходы с изменением поколения подавлены. Изучение распадов K - и B -мезонов позволило определить параметры $V_{\text{СКМ}}$ с хорошей точностью: $\tilde{s}_{12} = 0.226(2)$, $\tilde{s}_{23} = 41(1) \cdot 10^{-3}$, $\tilde{s}_{13} = 3.9(4) \cdot 10^{-3}$, $\tilde{\delta} = (80 \pm 10)^\circ$.

Перед тем, как переходить к численным значениям параметров матрицы U_{PMNS} , обсудим ее вид в случае майорановских нейтрино. При обсуждении матрицы смешивания кварков было сказано, что из шести фаз унитарной матрицы 3×3 пять убираются домножением на фазы полей кварков. Так как майорановское нейтрино – истинно нейтральная частица, свобода в умножении ее на произвольную фазу отсутствует. Вращением заряженных лептонов можно убрать три фазы, поэтому в дополнение к “дираковской” фазе δ в случае майорановских нейтрино имеются еще две “майорановские” фазы.

С учетом вышесказанного матрица смешивания для майорановских нейтрино имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} &\equiv U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}. \quad (8.21)
\end{aligned}$$

Нетрудно увидеть, что в амплитудах вероятности осцилляций нейтрино майорановские фазы сокращаются (амплитуда есть сумма членов, в каждом из которых нейтрино с

определённой массой и “выходит”, и “входит”)⁵.

Угол θ_{12} равен θ_{\odot} , поэтому в дальнейшем для синуса и косинуса этого угла мы используем обозначения s_{\odot} и c_{\odot} . Угол смешивания θ_{23} близок к 45° ; заменим его синус и косинус на $1/\sqrt{2}$. Лучшее ограничение на угол θ_{13} получено в реакторном эксперименте CHOOZ, детектор которого находится в толще горы, что позволяет эффективно подавить фон и измерить поток $\bar{\nu}_e$ на расстоянии километра от реактора. В эксперименте ищется уменьшение потока нейтрино, даваемое формулой (8.4):

$$P_{\bar{\nu}_e\bar{\nu}_e} = 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 1.27 \frac{\Delta m_{13}^2 (\text{эВ}^2)}{E (\text{МэВ})} x(\text{м}) . \quad (8.22)$$

Подставляя $\Delta m_{13}^2 (\approx \Delta m_{23}^2) = \pm 2.4 \cdot 10^{-3} \text{эВ}^2$ получим, что второй квадрат синуса близок к единице. Это позволило получить

$$\theta_{13} < 13^\circ \quad (8.23)$$

на 90% у.д.

В дальнейшем планируются реакторные эксперименты, чувствительные к меньшим значениям θ_{13} благодаря наличию нескольких детекторов, находящихся на разных расстояниях от реакторов (Double CHOOZ, Daya Bay). Планируются и ускорительные эксперименты, ищущие появление ν_e на длинах, характерных для осцилляций атмосферных нейтрино, и, тем самым, также чувствительные к величине θ_{13} (см. задачу 13).

Покажем, что малость θ_{13} и иерархия разностей квадратов масс $|\Delta m_{23}^2| \gg \Delta m_{21}^2$ позволяли нам до сих пор ограничиваться формулами двухнейтринных осцилляций для правильного описания осцилляций солнечных и атмосферных нейтрино, а также результатов ускорительных экспериментов и эксперимента Kamland.

Перепишем матрицу смешивания нейтрино (8.21), удерживая главные члены в матричных элементах и опуская фазы α_1 и α_2 , не влияющие на амплитуды вероятностей нейтринных осцилляций:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\odot} & s_{\odot} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -\frac{s_{\odot}}{\sqrt{2}} & \frac{c_{\odot}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{s_{\odot}}{\sqrt{2}} & -\frac{c_{\odot}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} . \quad (8.24)$$

Малость s_{13} оправдывает рассмотрение осцилляций солнечных и реакторных (Kamland) нейтрино как результат смешивания состояний ν_1 и ν_2 . Выражая массовые состояния через флэйворные

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\odot} & -\frac{s_{\odot}}{\sqrt{2}} & \frac{s_{\odot}}{\sqrt{2}} \\ s_{\odot} & \frac{c_{\odot}}{\sqrt{2}} & -\frac{c_{\odot}}{\sqrt{2}} \\ s_{13}e^{i\delta} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} , \quad (8.25)$$

⁵Майорановские фазы важны в $2\beta 0\nu$ -распадах: они влияют на численное значение множителя $c_{12}^2 c_{13}^2 e^{i\alpha_1} m_1 + s_{12}^2 c_{13}^2 e^{i\alpha_2} m_2 + s_{13}^2 e^{-2i\delta} m_3$, которому пропорциональны амплитуды этих распадов.

найдем, что вылетающее из Солнца ν_2 содержит одинаковое количество ν_μ и ν_τ , в то время как количество ν_e подавлено множителем $\sin^2 \theta_\odot$, как и говорилось. В эксперименте Kamland наблюдается результат осцилляций ν_e и $(\nu_\mu - \nu_\tau)/\sqrt{2}$; $P_{\nu_e \nu_e}$ дается формулой (8.4), в которой под углом смешивания θ следует понимать θ_\odot , а $\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$.

Задача 14. Получить выражение для измеряемой в эксперименте Камланд вероятности $P_{\nu_e \nu_e}$ с учетом отличия s_{13} от нуля (учесть малость s_{13} и тот факт, что на характерных для этого эксперимента расстояниях $(|\Delta m_{31}^2|/4E)l \gg 1$).

В случае атмосферных и ускорительных нейтрино ν_μ состоит из когерентной суперпозиции $(c_\odot \nu_2 - s_\odot \nu_1)/\sqrt{2}$ и $\nu_3/\sqrt{2}$, между которыми и происходят осцилляции. В силу того, что $\Delta m_{21}^2 \ll |\Delta m_{13}^2| \approx |\Delta m_{23}^2|$, на характерных для этих наблюдений и экспериментов расстояниях разность фаз между ν_1 и ν_2 возникнуть не успевают.

Для обсуждения CP-нарушения в осцилляциях нейтрино следует удерживать фазу δ , работая со следующей матрицей смешивания нейтрино:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s & s_{13}e^{i\delta} \\ -\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}}s_{13}e^{i\delta} & \frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{s}{\sqrt{2}}s_{13}e^{i\delta} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}}s_{13}e^{i\delta} & -\frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{s}{\sqrt{2}}s_{13}e^{i\delta} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

, где $c \equiv c_\odot$, $s \equiv s_\odot$.

Задачи на будущее: измерение угла θ_{13} и фазы δ ; выяснение, является ли иерархия масс нейтрино нормальной ($m_3 > m_2 > m_1$) или обратной ($m_2 > m_1 > m_3$); определение абсолютной шкалы масс нейтрино и ее природы (майорановская или дираковская).

Задача 15. Вакуумные осцилляции трех поколений нейтрино. С учетом ненулевых значений α_1 , α_2 и δ найти $P_{\nu_e \nu_e}$, $P_{\bar{\nu}_e \bar{\nu}_e}$, $P_{\nu_\mu \nu_\mu}$, $P_{\bar{\nu}_\mu \bar{\nu}_\mu}$, $P_{\nu_\mu \nu_e}$, $P_{\bar{\nu}_\mu \bar{\nu}_e}$. Представить выражения для вероятностей в аналогичном формулам (8.4) и (8.5) виде, пользуясь тем, что произведение строки на комплексно-сопряженную строку унитарной матрицы равно либо единице, либо нулю. (То же относится к столбцам.) Зависят ли эти вероятности от майорановских фаз α ? Почему несмотря на обусловленную ненулевой фазой δ нарушение CP имеют место равенства $P_{\nu_e \nu_e} = P_{\bar{\nu}_e \bar{\nu}_e}$, $P_{\nu_\mu \nu_\mu} = P_{\bar{\nu}_\mu \bar{\nu}_\mu}$? Найти разность $\Delta_{\mu e} \equiv P_{\nu_\mu \nu_e} - P_{\bar{\nu}_\mu \bar{\nu}_e}$, отличие от нуля которой свидетельствует о нарушении CP в осцилляциях нейтрино. Проверить, что когда массы каких-либо двух нейтрино совпадают, $\Delta_{\mu e}$ обращается в ноль. Почему? Найти выражение для $\Delta_{\mu e}$ в случае, когда расстояние от точки рождения до точки регистрации нейтрино – порядка длины осцилляций атмосферных нейтрино ($\frac{\Delta m_{31}^2}{4E}L \approx 1$). Как учет материи скажется на полученных результатах?

Представим себе мысленный эксперимент, в котором очень точно измеряются энергии (а значит, и импульсы) заряженных частиц, участвующих в реакции с рождением

нейтрино. Такое измерение позволяет восстановить энергию и импульс нейтрино и, таким образом, вычислить его массу. Тогда можно точно сказать, какое нейтрино родилось – ν_1 или ν_2 , и, тем самым, осцилляционная картина уничтожается. Мы сталкиваемся с парадоксом Эйнштейна - Подольского - Розена: событие измерения импульса заряженной частицы отделено от события наблюдения нейтрино пространственно-подобным интервалом, однако одно влияет на другое. Парадокс снимается соотношением неопределенности $\Delta P \Delta X \geq 1$: точное измерение импульсов участвующих в реакции частиц приводит к плохому знанию положения точки распада, что и “замазывает” осцилляционную картину. Точность, с которой мы должны восстанавливать импульс нейтрино, должна быть не хуже $\frac{\Delta m^2}{E}$. Измеряя с такой точностью импульс распадающейся частицы, мы не можем определить ее положение в пространстве точнее, чем $E/\Delta m^2 \sim l_\nu$. Это полностью уничтожает осцилляционную картину, оставляя подавление нейтрино: скажем, рожденное ν_e наблюдается как ν_e с вероятностью $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\theta$ и как ν_μ с вероятностью $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 4\theta$. Эти вероятности не меняются с расстоянием X .

Осцилляционная картина в пространстве при большом удалении от источника пропадает и заменяется на подавление. Причина в том, что длина волнового пакета нейтрино конечна, и за счет разности скоростей пакетов ν_1 и ν_2 они, в конце концов, расходятся – происходит потеря когерентности. Расхождение двух волн за время t дается выражением

$$\Delta X = t(v_1 - v_2) = t \frac{\Delta m^2}{2E^2} \sim \frac{t}{El_\nu} = \frac{l}{El_\nu}, \quad (8.26)$$

где l – расстояние, проходимое нейтрино за время t . ΔX должно быть меньше длины пакета. Если длина пакета порядка обратной энергии нейтрино, то осцилляции не происходят вообще, “замазываясь” после одного колебания. При образовании нейтрино характерная длина пакета много больше $1/E$, поэтому можно наблюдать много осцилляций.

Л Е К Ц И Я 9

Необходимость учета радиационных поправок в электрослабой теории, $\alpha(m_Z^2) \equiv \bar{\alpha}$, формулы для $\bar{\alpha}$, G_μ и m_Z^2 через затравочные параметры, формулы для физических наблюдаемых m_W , g_A и g_V через $\bar{\alpha}$, G_μ и m_Z^2 с учетом радиационных поправок, вычисление поправок $\sim \alpha_W(\frac{m_t}{m_Z})^2$ в поляризаационных операторах векторных бозонов, размерная регуляризация, поправки $\sim \alpha_W(\frac{m_t}{m_Z})^2$ к m_W , g_A и g_V/g_A .

Экспериментальная точность, с которой измерены параметры Z -бозона и масса W -бозона, составляет приблизительно 0.1%. Для вклада в эти величины электрослабых радиационных поправок должна работать следующая простая оценка: $\delta \sim \frac{g^2}{16\pi^2} = \frac{\alpha_W}{4\pi} = \frac{\alpha}{4\pi \sin^2\theta} \approx 0.2\%$. Ясно, что для анализа экспериментальных данных учет поправок необходим. В этой лекции будет описана общая схема анализа электрослабых радиационных поправок и вычислены параметрически усиленные вклады.

Кратко напомним схему учета радиационных поправок в квантовой электродинамике. Лагранжиан теории содержит два параметра: константу связи электронов с фотоном e_0 и массу электрона m_0 . Радиационные поправки к затравочным значениям e_0 и m_0 расходятся и пропорциональны $\alpha \ln(\frac{\Lambda}{m_e})^2$, где Λ – параметр ультрафиолетового обрезания. Взаимодействие перенормирует параметры затравочного лагранжиана. Экспериментально измеренные с очень высокой точностью масса электрона и постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/4\pi$ накладывают следующие связи на параметры исходного лагранжиана:

$$e = e_0[1 + c_e \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m_e^2}], \quad m = m_0[1 + c_m \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m_e^2}], \quad (9.1)$$

где числа c_e и c_m определяются вычислением соответствующих фейнмановских диаграмм. В силу (9.1) e_0 и m_0 являются функциями Λ : $e_0 \equiv e_0(\Lambda)$, $m_0 \equiv m_0(\Lambda)$. При вычислении амплитуды любого физического процесса (например, комптоновского рассеяния) мы получаем выражение следующего вида: $A = A_0(e_0, m_0) + A_1(e_0, m_0, \Lambda)$, где A_0 – древесная амплитуда, а A_1 – петлевая поправка, зависящая от затравочных параметров, ультрафиолетового обрезания Λ , а также кинематических переменных. Перенормируемость теории гарантирует, что, подставляя в A_0 выражения для e_0 и m_0 через e , m и Λ , получаемые из (9.1), мы получим конечное выражение для A через e , m и различные кинематические переменные. Эта программа может быть проведена в любом порядке теории возмущений.

Аналогичный подход к вычислению радиационных поправок возможен и в $SU(2) \times U(1)$ электрослабой калибровочной теории. Однако имеются существенные отличия от квантовой электродинамики. Заряды g и g' не измеряются на опыте непосредственно, и их (зависящие от определения) численные значения известны со сравнительно плохой точностью. Массы же калибровочных бозонов вообще не являются параметрами

исходного лагранжиана. Поэтому физически более наглядным и наиболее быстро ведущим к искомым результатам является несколько иной подход (Высоцкий, Новиков, Окунь, Розанов). Для трех физических величин, известных с наилучшей точностью (G_μ , m_Z и α), выписываются выражения через затравочные параметры теории (g_0 , \bar{g}_0 и η_0) с учетом радиационных поправок, вносящих зависимость от параметра обрезания Λ . Соответствующие алгебраические уравнения обращаются, и находятся выражения для затравочных параметров теории через наиболее точно измеренные величины и параметр ультрафиолетового обрезания Λ : $g_0 = g_0(G_\mu, m_Z, \alpha; \Lambda)$; $\bar{g}_0 = \bar{g}_0(G_\mu, m_Z, \alpha; \Lambda)$; $\eta_0 = \eta_0(G_\mu, m_Z, \alpha; \Lambda)$. При этом используется формальная теория возмущений по затравочным (бесконечным при $\Lambda \rightarrow \infty$) зарядам. На следующем этапе выписываются выражения для физических величин (скажем, m_W) через затравочные параметры с учетом радиационных поправок $m_W = m_W(g_0, \bar{g}_0, \eta_0; \Lambda)$, и в эти выражения подставляются выражения для затравочных величин через наиболее точно измеренные величины: $m_W = m_W[g_0(G_\mu, m_Z, \alpha; \Lambda), \bar{g}_0(G_\mu, m_Z, \alpha; \Lambda), \eta_0(G_\mu, m_Z, \alpha; \Lambda); \Lambda]$. Благодаря перенормируемости теории зависимость от ультрафиолетового обрезания в полученных выражениях сокращается, и мы приходим к конечным выражениям для интересующих нас амплитуд через G_μ , m_Z и α , в которых учтены (конечные) электрослабые радиационные поправки. В этой программе мы избегаем введения конечных электрослабых зарядов g и g' – для физики промежуточных бозонов эти параметры являются вторичными. Отметим, что для регуляризации фейнмановских интегралов в электрослабой теории удобно использовать метод размерной регуляризации, не противоречащий требованию локальной калибровочной инвариантности. Вместо нарушающего локальную калибровочную инвариантность ультрафиолетового обрезания Λ промежуточные выражения содержат полюс $1/\varepsilon$, где $D = 4 - 2\varepsilon$ – число размерностей пространства-времени, и зависят от параметра размерности массы μ , вводимого для поддержания первоначальной размерности интегралов. В окончательных выражениях зависимость от ε и μ исчезает.

Перейдем к выписыванию уравнений для наиболее точно измеренных величин и начнем с постоянной тонкой структуры α , которая описывает поглощение реального фотона с бесконечно малой энергией покоящимся электроном. В случае КЭД сумма радиационных поправок к вершине и внешним фермионным линиям в этой кинематике равна нулю, и для вклада графиков (рис. 9.1a) и 9.1b)) имеем

$$\alpha \equiv \alpha(q^2 = 0) = \frac{e_0^2}{4\pi} [1 - \Pi'_\gamma(0)] , \quad (9.2)$$

где $\Pi'_\gamma(0) = \left(\frac{d\Pi_\gamma(q^2)}{dq^2}\right)_{q^2=0}$, а $\Pi_\gamma(q^2)$ – коэффициент при $g_{\mu\nu}$ в поляризованном операторе фотона $\Pi_{\mu\nu}^\gamma(q^2)$; фейнмановской диаграмме отвечает выражение $-i\Pi_{\mu\nu}$.

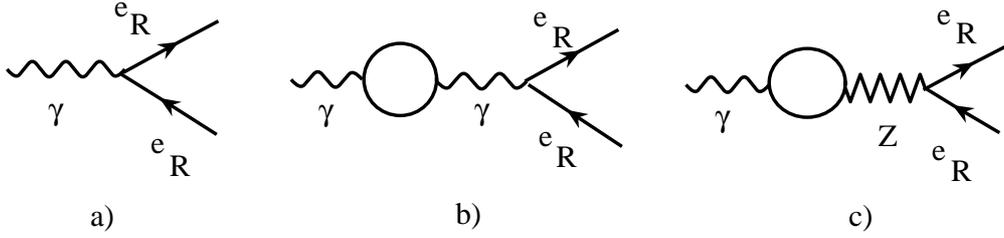


Рис. 9.1. Графики, перенормирующие затравочный заряд правого электрона.

Переход к уравнению для α сокращает характеризующий внешнюю ногу коэффициент $1/2$ в поправке. В электрослабой теории появляется дополнительный график (рис. 9.1с)).

Вклад фермионов в $\Pi_{\gamma Z}$ пропорционален q^2 , а вклад W^+W^- -петли зависит от калибровки. В унитарной калибровке $\Pi_{\gamma Z}(0) = 0$, но, не фиксируя калибровку заранее, мы обязаны удерживать это слагаемое (в частности, радиационная поправка к электрическому заряду нейтрино в R_ξ калибровках зануляется только при учете $\Pi_{\gamma Z}(0)$). Для левых электронов необходимо учитывать также вершинную диаграмму с обменом W -бозоном, поэтому мы рассматриваем взаимодействие фотона с правым электроном.

Легко убедиться, что диаграмма 9.1с) следующим образом изменяет уравнение (9.2):

$$\alpha = \frac{e_0^2}{4\pi} \left[1 - \Pi'_\gamma(0) - 2 \frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} \right], \quad (9.3)$$

где мы учли, что взаимодействие Z -бозона с e_R пропорционально $-Qs^2\bar{g} = -Q\frac{s}{c}e$, тогда как взаимодействие фотона пропорционально Qe ($e \equiv \sqrt{4\pi\alpha}$).

Мы можем строить теорию радиационных поправок, исходя из уравнения (9.3). При этом древесные выражения для физических наблюдаемых будут зависеть от постоянной тонкой структуры α , а петлевые поправки будут содержать $\Pi'_\gamma(0) \sim \alpha \ln(\Lambda^2/m_{e,q}^2)$, где m_e, m_q – массы лептонов и кварков. Как уже было сказано, ультрафиолетовые расходимости в окончательных выражениях исчезнут, и останутся логарифмически усиленные поправки $\sim \alpha \ln(\frac{M_Z^2}{m_{e,q}^2})$. Физический смысл этих поправок прост – они отвечают изменению (бегу, перенормировке) постоянной тонкой структуры от $q^2 = 0$ до $q^2 = M_Z^2$ – масштабу, характерному для электрослабой физики. Удобно учесть эти поправки с самого начала, отделяя чисто электродинамический эффект бега α от собственно слабых радиационных поправок. С этой целью определим электрослабую константу на масштабе M_Z с помощью следующего уравнения:

$$\bar{\alpha} \equiv \alpha(M_Z) = \frac{e_0^2}{4\pi} \left[1 - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} - 2 \frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} \right], \quad (9.4)$$

которое будет служить нам для выражения затравочных параметров модели через $\bar{\alpha}$ (напомним, что $e_0^2 = g_0^2(1 - \frac{g_0^2}{\bar{g}_0^2})$).

Перед тем как переходить к уравнениям для G_μ и m_Z , обсудим численное значение $\bar{\alpha}$. Деля (9.4) на (9.3), получим

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{1 - \delta\alpha}, \quad \delta\alpha = \Pi'_\gamma(0) - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2}. \quad (9.5)$$

Отправление $\delta\alpha$ в знаменатель отвечает суммированию лидирующих поправок $\sim (\alpha \ln \frac{M_Z^2}{m_{e,q}^2})^n$, происходящих от итерации однопетлевой диаграммы рис. 9.1b). Вычислим вклад электронов в $\delta\alpha$. Для поляризационного оператора фотона имеем

$$-i\Pi_{\mu\nu}^\gamma(q^2) = -4\pi\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Sp\gamma_\mu \frac{1}{\hat{k} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{k} - \hat{q} - m}, \quad (9.6)$$

где знак минус перед интегралом обусловлен тем, что в петле распространяются фермионы. Вычислить логарифмически усиленную поправку к α совсем просто. Пренебрежем массой электрона и разложим член $(\hat{k} - \hat{q})^{-1}$ до приводящего к логарифмическому интегралу слагаемого:

$$\frac{1}{\hat{k} - \hat{q}} = \frac{1}{\hat{k}} + \frac{1}{\hat{k}} \frac{\hat{q}}{\hat{k}} + \frac{1}{\hat{k}} \frac{\hat{q}}{\hat{k}} \frac{1}{\hat{k}} \frac{\hat{q}}{\hat{k}} + \dots \quad (9.7)$$

Удерживая последний член, получим

$$\Pi_{\mu\nu}^\gamma \approx -i4\pi\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Sp\gamma_\mu \frac{1}{\hat{k}} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{k}} \frac{\hat{q}}{\hat{k}} \frac{1}{\hat{k}} \frac{\hat{q}}{\hat{k}}. \quad (9.8)$$

Нетрудно убедиться, что $\Pi_{\mu\nu}$ поперечен, $\Pi_{\mu\nu} \sim q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu$ (причем не только в главном логарифмическом приближении, но и в общем виде при сохраняющей калибровочную инвариантность регуляризации).

Задача 16. Проверить поперечность $\Pi_{\mu\nu}^\gamma$ в главном логарифмическом приближении (ГЛП).

Сворачивая индексы μ и ν , получим

$$\begin{aligned} \Pi_\gamma(q^2) &\approx \frac{-i4\pi\alpha}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-2)}{k^6} Sp\hat{k}\hat{q}\hat{k}\hat{q} = -i\frac{16\pi\alpha}{3} q^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^4} = \\ &= \frac{\alpha}{3\pi} q^2 \ln \frac{\Lambda^2}{\max[q^2, m_e^2]}, \end{aligned} \quad (9.9)$$

где мы обрезали интеграл наверху на Λ^2 , а внизу он обрезается q^2 при $q^2 \gg m_e^2$ и m_e^2 при $m_e^2 \gg q^2$. Наконец, с помощью (9.5) получим

$$\delta\alpha = \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{M_Z^2}{m_e^2}\right). \quad (9.10)$$

Мы получили знаменитую формулу, описывающую рост электромагнитного заряда с увеличением импульса, или с уменьшением расстояния. Это явление было в 50-х годах названо ноль-зарядом: требование конечности заряда на малых расстояниях приводит к полной экранировке его на больших расстояниях. Более аккуратное вычисление с учетом постоянного члена дает

$$\delta\alpha_l = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_l \left[\ln \frac{M_Z^2}{m_l^2} - \frac{5}{3} \right] = 0.0314 \quad , \quad (9.11)$$

где мы учли вклад e , μ и τ . Теоретически вычислить вклад адронов в $\delta\alpha$ не позволяет неумение работать с КХД в области малых энергий. Поэтому для его вычисления поступают следующим образом: записывается дисперсионный интеграл для вклада адронов в Π ; мнимая часть этого вклада пропорциональна сечению e^+e^- -аннигиляции в адроны. Для этого сечения используются экспериментальные данные при низких энергиях, а при высоких энергиях – партонная модель. В результате было найдено

$$\delta\alpha_h = 0.0276(4) \quad , \quad (9.12)$$

где неопределенность обусловлена экспериментальной ошибкой в измерении сечения. Заметим, что в $\delta\alpha_h$ принято учитывать вклад 5 кварковых флэйворов; вклад t -кварка численно мал, и его относят к собственно электрослабым поправкам. Аналогично поступают с (маленьким) вкладом W -бозона.

Используя (9.11) и (9.12), из (9.5) получим

$$\alpha(M_Z) \equiv \bar{\alpha} = [128.95(5)]^{-1} \quad (9.13)$$

. Ошибка в $\bar{\alpha}$ порядка 10^{-3} делает эту величину наименее точно измеренной из наиболее точно измеренной тройки ($\bar{\alpha}$, M_Z и G_μ).

Закончим обсуждение электромагнитной константы формулой для $\bar{\alpha}$ через затравочные параметры электрослабой модели

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{4\pi} g_0^2 \left(1 - \frac{g_0^2}{\bar{g}_0^2} \right) \left[1 - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} - 2 \frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} \right] \quad . \quad (9.14)$$

Перейдем к уравнению для массы Z -бозона.

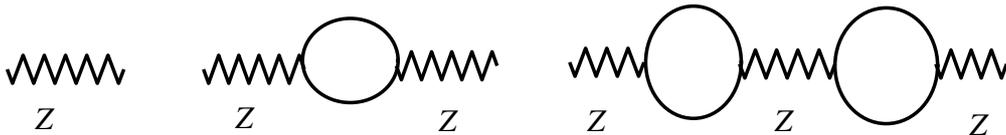


Рис. 9.2. Одевание затравочного пропагатора Z -бозона.

Суммируя графики рис.9.2 и учитывая, что петлевой диаграмме отвечает выражение $-i\Pi_{\mu\nu}$, получим

$$G_{\mu\nu}^Z = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - M_{Z_0}^2 + \Pi_Z(k^2)} + \dots , \quad (9.15)$$

где многоточием обозначена не интересующая нас продольная часть пропагатора Z -бозона. Массе Z -бозона отвечает полюс пропагатора:

$$M_Z^2 = M_{Z_0}^2 - \Pi_Z(M_Z^2) , \quad M_{Z_0} = \frac{\bar{g}_0\eta_0}{2} . \quad (9.16)$$

В древесном приближении амплитуда распада мюона изображена на рис. 1.1. Радиационные поправки к ней удобно разделить на две части: аналогичное рис. 9.2 одевание пропагатора W -бозона, описываемое величиной $\Pi_W(0)$ (вклад продольной части $\Pi_{\mu\nu}(W)$ подавлен как $m_\mu m_e/m_W^2$ и может быть опущен) и вершинные поправки и квадратики, обозначаемые буквой D ,

$$\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} = \frac{g_0^2}{8m_{W_0}^2} \left[1 + \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} + D\right] = \frac{1}{2\eta_0^2} \left[1 + \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} + D\right] . \quad (9.17)$$

Может возникнуть вопрос, не возникает ли усиленных логарифмических поправок, отвечающих бегу слабого заряда от $q^2 \approx m_\mu^2$ до $q^2 \approx M_W^2$ в формуле (9.17) аналогично тому, как это происходит в формуле (9.2), где производная поляризационного оператора фотона $\Pi'_\gamma(0)$ содержит $\ln(\Lambda^2/m_e^2)$. Поляризационный оператор W -бозона $\Pi_W(q^2)$ содержит аналогичный логарифм, $\Pi_W(q^2) \sim q^2 \ln \frac{\Lambda^2}{\max(q^2, m_e^2)}$, но ненулевая масса W -бозона приводит к отсутствию логарифмической перенормировки слабого заряда от $q^2 \sim m_\mu^2$ до $q^2 \sim M_W^2$. Мы видим, что логарифмическая перенормировка заряда происходит при импульсах, бóльших не только масс виртуальных частиц в петлях, но и массы соответствующего векторного бозона. Поэтому в физике W - и Z -бозонов большой логарифм имеется только в беге α , и формула (9.14) уже избавлена от него. Работая с $\bar{\alpha}$, мы учитываем бег α с самого начала.

Выпишем полученную нами систему уравнений:

$$G_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\eta_0^2} \left[1 + \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} + D\right] , \quad (9.18)$$

$$M_Z^2 = \frac{1}{4}\bar{g}_0^2\eta_0^2 - \Pi_Z(M_Z^2) , \quad (9.19)$$

$$4\pi\bar{\alpha} = g_0^2 \left(1 - \frac{g_0^2}{\bar{g}_0^2}\right) \left[1 - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} - 2\frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2}\right] \quad (9.20)$$

и найдем выражения для затравочных параметров. Из (9.18)

$$\eta_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}G_\mu} \left[1 + \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} + D\right] . \quad (9.21)$$

Подставляя выражение для η_0 в (9.19), найдем \bar{g}_0

$$\bar{g}_0^2 = 4\sqrt{2}G_\mu M_Z^2 \left[1 + \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} - D \right] . \quad (9.22)$$

Наконец, из выражения (9.20) найдем g_0 . Поделим для этого правую и левую части (9.20) на \bar{g}_0 и подставим в левую часть выражение для \bar{g}_0 из (9.22). После простых преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{g_0^2}{\bar{g}_0^2} \left(1 - \frac{g_0^2}{\bar{g}_0^2} \right) &= \frac{\pi\bar{\alpha}}{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2} \left(1 + \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} - \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} + \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2\frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} + D \right) . \end{aligned} \quad (9.23)$$

Вводя электрослабый угол смешивания θ согласно формуле

$$\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{\pi\bar{\alpha}}{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2} , \quad \sin^2 \theta = 0.2310(1) \quad (9.24)$$

(сравни формулу (4.15) и замечания после формулы (5.17)) и обозначая $s \equiv \sin \theta$, $c \equiv \cos \theta$, из уравнения (9.23) мы получим

$$\frac{g_0}{\bar{g}_0} = c \left[1 + \frac{s^2}{2(c^2 - s^2)} \left(\frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} - 2\frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} - D \right) \right] . \quad (9.25)$$

Пропорциональность поправки s^2 естественна: если бы $U(1)$ заряд g'_0 был равен нулю, то $s^2 = 0$ и $g_0 = \bar{g}_0$.

Формулы (9.21), (9.22) и (9.25) решают поставленную задачу, выражая затравочные параметры теории через $\bar{\alpha}$, M_Z , G_μ и радиационные поправки, содержащие ультрафиолетовые расходимости.

Теперь мы переходим к получению и анализу формул для физических наблюдаемых. Начнем с массы W -бозона. Аналогично (9.16) имеем

$$M_W^2 = M_{W_0}^2 - \Pi_W(M_W^2) , \quad M_{W_0} = \frac{g_0 \eta_0}{2} . \quad (9.26)$$

Деля (9.26) на (9.16), получим

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{g_0}{\bar{g}_0} \left[1 + \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{2M_Z^2} - \frac{\Pi_W(M_W^2)}{2M_W^2} \right] . \quad (9.27)$$

В третьей лекции говорилось о приближенной $SU(2)_L \times SU(2)_R$ глобальной симметрии модели ГВС. Если $U(1)$ заряд g'_0 был бы равен нулю, то мы бы имели $g_0 = \bar{g}_0$, и $M_W = M_Z$ с точностью до поправок за счет поляризационных операторов. В приближении $g'_0 = 0$ мы имели бы $\Pi_Z(M_Z^2) = \Pi_W(M_W^2)$, если бы массы фермионов, распространяющихся в петле, обладали бы $SU(2)_L \times SU(2)_R$ симметрией. Для соблюдения глобальной

симметрии хиггсовский дублет и комплексно сопряженный антидублет должны объединяться в 2×2 матрицу Φ , см. (3.14). При этом массовый член кварков имеет следующий $SU(2)_L \times SU(2)_R$ симметричный вид:

$$\Delta L_m = \lambda_{ij}(u_L d_L)_i \Phi \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix}_j \quad (9.28)$$

и массовые матрицы верхних и нижних кварков (и лептонов) совпадают. Их отличие – вторая причина нарушения $SU(2)_L \times SU(2)_R$ симметрии, проявляющаяся в различии петлевых поправок к M_W и M_Z . Для лептонов и первых двух поколений кварков эффект мал, так как пропорционален отношению разницы квадратов масс фермионов к квадрату массы промежуточного бозона. Для третьего поколения кварков эта малость превращается в великость: при массе t -кварка $m_t \approx 175$ ГэВ, $m_t^2/M_Z^2 \approx 4$ и вклад дублета (t, b) усилен.

В реальной жизни g'_0 также не равно нулю. Подставляя в (9.27) отношение затраченных зарядов из (9.25), окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{M_W}{M_Z} = c + \frac{c^3}{2(c^2 - s^2)} \left(\frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} \right) + \frac{cs^2}{2(c^2 - s^2)} \left(\frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} - \right. \\ \left. - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} - 2 \frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} - D \right) . \end{aligned} \quad (9.29)$$

Непосредственным вычислением проверяется сокращение ультрафиолетовых расходимостей в полученной формуле.

Перейдем к распаду Z -бозона на пару заряженных лептонов. Вспоминая, что Z -бозон взаимодействует с фермионами в соответствии с формулой (3.26), в древесном приближении для амплитуды распада получим

$$A_0 = \frac{\bar{g}_0}{2} \bar{e} \left[-\frac{1}{2} \gamma_\alpha \gamma_5 - \left(\frac{1}{2} - 2s_0^2 \right) \gamma_\alpha \right] e Z_\alpha , \quad (9.30)$$

где $s_0^2 \equiv 1 - \frac{g_0^2}{g_0'^2}$. Для учета радиационных поправок в (9.30) следует подставить выражения (9.22) и (9.25) для \bar{g}_0 и g_0/\bar{g}_0 , а также учесть петлевые поправки к древесной диаграмме, изображенные на рис. 9.3.

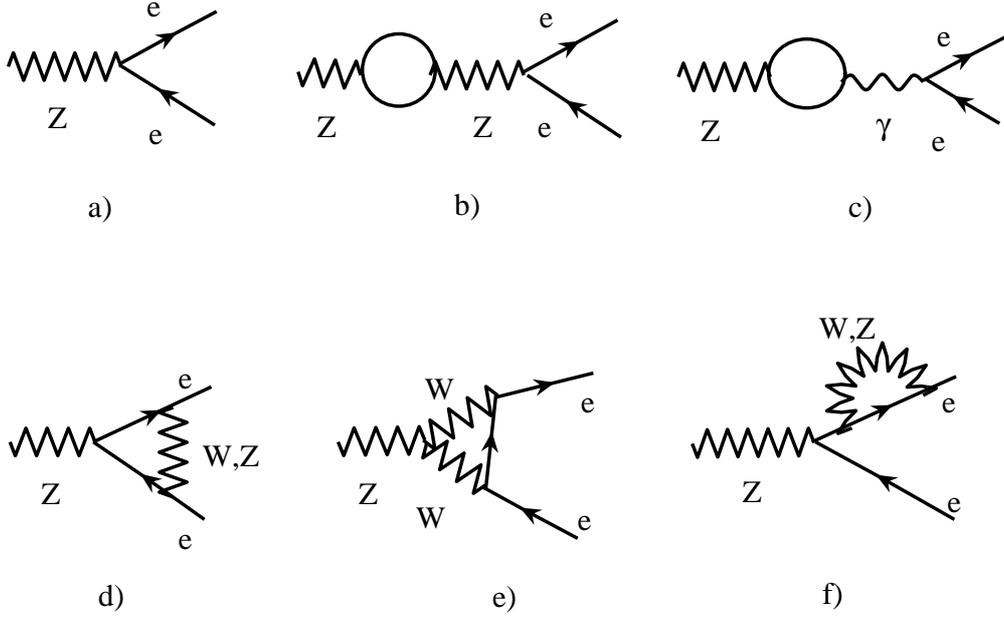


Рис. 9.3. Амплитуда распада $Z \rightarrow e^+e^-$ с учетом петлевых поправок.

В результате имеем

$$\begin{aligned}
A = & \sqrt{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2} \left[1 + \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{2M_Z^2} - \frac{\Pi_W(0)}{2M_W^2} - \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}\Pi'_Z(M_Z^2) \right] \times \\
& \times \left\{ \left(-\frac{1}{2} + F_A \right) \bar{e} \gamma_\alpha \gamma_5 e + \left[2s^2 - \frac{1}{2} + F_V + 2cs \frac{\Pi_{Z\gamma}(M_Z^2)}{M_Z^2} + \frac{2s^2 c^2}{c^2 - s^2} \right] \times \right. \\
& \left. \times \left(\frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} - \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} + \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} + 2\frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} + D \right) \bar{e} \gamma_\alpha e \right\} , \quad (9.31)
\end{aligned}$$

где множитель $\Pi'_Z(M_Z^2)$ происходит от диаграммы рис. 9.3b), а функции F_A и F_V отвечают вкладом диаграмм рис.9.3d)-f) без учета обмена фотоном. Фотонные обмены и излучение реального фотона удобно отделить от амплитуды A и добавить к вероятности распада $Z \rightarrow e^+e^-$ (+ излучение фотона). Выражение (9.31) свободно от ультрафиолетовых расходимостей.

Запишем амплитуду распада $Z \rightarrow e^+e^-$ в виде (сравни (5.10))

$$A = \sqrt{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2} \bar{e} [g_A \gamma_\alpha \gamma_5 + g_V \gamma_\alpha] e Z_\alpha . \quad (9.32)$$

Уравнение (9.31) определяет значения феноменологических параметров g_V и g_A с учетом радиационных поправок.

Таким образом, получены выражения для величин, подверженных влиянию сильного взаимодействия лишь на уровне двух петель (глюонные поправки). Поэтому мы

вправе рассчитывать на хорошую точность теоретических формул, учитывающих электрослабые радиационные поправки.

В поляризационные операторы промежуточных векторных бозонов в одной петле дают вклад все фундаментальные частицы Стандартной Модели: кварки, лептоны, бозон Хиггса, векторные бозоны. Единственное исключение – глюоны, их вклад появляется на двухпетлевом уровне. Из всех этих вкладов параметрически усилен вклад третьего поколения кварков из-за большого нарушения $SU(2)_V$ симметрии разницей масс t - и b -кварков. Это нарушение приводит к усилению отличия Π_W от Π_Z , $\Pi_Z - \Pi_W \sim \alpha_W (m_t)^2$. Нетрудно проверить, что именно эта разность входит в формулы (9.29), (9.31).

Последняя не открытая на сегодняшний день частица (в рамках СМ) – бозон Хиггса. Нижнее ограничение на его массу $M_H > 114$ ГэВ на 95% уровне достоверности следует из того, что на ускорителе LEP II при максимальной энергии e^+e^- -пары $\sqrt{s} = 210$ ГэВ не наблюдалась реакция $e^+e^- \rightarrow Z^* \rightarrow ZH$ с последующим распадом $H \rightarrow b\bar{b}$. Верхнее ограничение на M_H дают точные вычисления M_W и параметров Z -бозона, обсуждением которых мы занимаемся.

В оставшейся части этой и в следующей лекции мы вычислим усиленные вклады в поляризационные операторы, пропорциональные m_t^2 и $\ln m_H^2$. Начнем с вклада дублета (b, t) . Вклад t -кварка в $\Pi_\gamma(q^2)$ при $m_t^2 \gg q^2$ подавлен как q^4/m_t^2 , то же относится к $\Pi_{\gamma Z}(q^2)$. Это подавление связано с сохранением диагональных векторных токов, в силу которого для фермионных вкладов имеем: $\Pi_\gamma(q^2), \Pi_{\gamma Z}(q^2) \sim [g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu] \Pi(q^2/m_t^2)$. Также ясно, что t -кварк не дает вклада ни в D , ни в F_i . В пределе $m_t^2 \gg m_W^2, m_Z^2$ имеем: $\Pi(m_V^2) = \Pi(0)$. Поэтому окончательно получим

$$\frac{M_W}{M_Z} = c + \frac{c^3}{2(c^2 - s^2)} \left(\frac{\Pi_Z(0)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} \right), \quad (9.33)$$

$$g_A = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\Pi_Z(0)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} \right), \quad (9.34)$$

$$g_V/g_A = 1 - 4s^2 + \frac{4c^2s^2}{c^2 - s^2} \left(\frac{\Pi_Z(0)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} \right). \quad (9.35)$$

Интересующая нас разность поляризационных операторов может быть вычислена немедленно, мы же используем эту возможность для несколько более подробного обсуждения.

Интегралы, отвечающие фермионным вкладам в поляризационные операторы, расходятся при больших импульсах виртуальных частиц. Для их регуляризации мы используем метод продолжения по размерности.

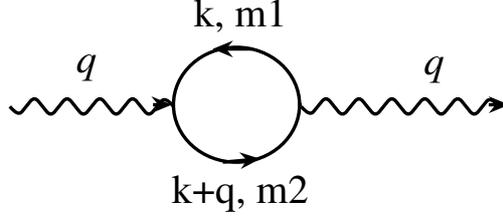


Рис. 9.4. Вклад фермионной петли в поляризационный оператор векторных бозонов.

Проведем вычисление диаграммы рис.9.4 для случая векторных и аксиальных токов:

$$-i\Pi_{\mu\nu}^{\psi}(q^2) = - \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{Sp \gamma_{\mu}(\gamma_5)(\hat{k} + m_1)\gamma_{\nu}(\gamma_5)(\hat{k} + \hat{q} + m_2)}{(k^2 - m_1^2)((k+q)^2 - m_2^2)} , \quad (9.36)$$

где верхний индекс “ ψ ” символизирует вклад фермионов. Знак “ $-$ ” перед интегралом обусловлен фермионами, распространяющимися в петле, и мы опустили константы связи. Множитель μ^{D-4} вводится для того, чтобы размерность поляризационного оператора не зависела от числа измерений. Матрицы γ_5 появляются в случае аксиальных токов. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2} \quad (9.37)$$

объединяем пропагаторы и делаем сдвигку переменной интегрирования $k \rightarrow k - qx$ (что допустимо, т.к. при $D < 2$ интеграл сходится):

$$i\Pi_{\mu\nu}^{\psi}(q^2) = \int \frac{d^D k dx Sp \gamma_{\mu}(\gamma_5)(\hat{k} - x\hat{q} + m_1)\gamma_{\nu}(\gamma_5)(\hat{k} + \hat{q} - x\hat{q} + m_2)}{(2\pi)^D \mu^{D-4} [k^2 + q^2 x(1-x) - m_2^2 x - m_1^2(1-x)]^2} . \quad (9.38)$$

Перейдем к вычислению шпура γ -матриц. Матрица γ_5 является с точки зрения изменения размерностей пространства-времени плохим объектом; тем не менее, для вычисления поляризационных операторов в теориях с киральными фермионами достаточно использовать формальное определение матрицы γ_5 как матрицы, антикоммутирующей с матрицами γ_{μ} при всех μ , квадрат которой равен единице. Пользуясь этим определением и стандартными правилами для вычисления шпуров, получим

$$i\Pi_{\mu\nu}^{\psi}(q^2) = \int \frac{4dx d^D k}{(2\pi)^D (\mu)^{D-4}} \frac{[2k_{\mu}k_{\nu} - k^2 g_{\mu\nu} + x(x-1)(2q_{\mu}q_{\nu} - g_{\mu\nu}g^2) + (-)m_1 m_2 g_{\mu\nu}]}{[k^2 + x(1-x)q^2 - m_2^2 x - (1-x)m_1^2]^2} , \quad (9.39)$$

где знак “ $-$ ” перед членом $m_1 m_2$ появляется в случае аксиальных токов. Используя формулу усреднения по направлениям

$$k_{\mu}k_{\nu} = \frac{1}{D} g_{\mu\nu} k^2 , \quad (9.40)$$

и делая виковский поворот ($k_0 \rightarrow ik_D$) получим интеграл по евклидову пространству

$$\Pi_{\mu\nu}^{\psi}(q^2) = \int \frac{4dx d^D k}{(2\pi)^D (\mu)^{D-4}} \frac{(1 - \frac{2}{D})k^2 g_{\mu\nu} + x(x-1)(2q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) + (-)m_1 m_2 g_{\mu\nu}}{[k^2 - q^2 x(1-x) + m_2^2 x + m_1^2(1-x)]^2} . \quad (9.41)$$

Для вычисления интеграла по импульсам в методе размерной регуляризации требуется знание одного табличного интеграла:

$$\int \frac{d^D k (k^2)^s}{(k^2 + m^2)^\alpha} = \frac{\pi^{D/2} \Gamma(D/2 + s) \Gamma(\alpha - D/2 - s)}{\Gamma(D/2) \Gamma(\alpha)} (m^2)^{\frac{D}{2} - \alpha + s} , \quad (9.42)$$

где $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, имеющая простые полюса при целых неположительных значениях аргумента, которые сигнализируют об ультрафиолетовой расходимости исходного интеграла ($D=4$, $\alpha-s=2$ – логарифмическая расходимость, $\alpha-s=1$ – квадратичная расходимость). К квадратичной расходимости при $D=4$ приводит первый член в числителе (9.41). Ей отвечает полюс Γ -функции при $D=2$. Этот полюс компенсируется множителем $1 - \frac{2}{D}$, уничтожающим “квадратичную расходимость” в методе размерной регуляризации. Используя интеграл (9.42), после простых преобразований имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{\psi} = & \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{2^{D-2} \mu^{D-4} \pi^{D/2}} \int_0^1 dx [m_1^2(1-x) + m_2^2 x - q^2 x(1-x)]^{\frac{D}{2}-2} \{2x(1-x) \times \\ & \times (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) + g_{\mu\nu}((-)m_1 m_2 - m_1^2(1-x) - m_2^2 x)\} . \end{aligned} \quad (9.43)$$

Диагональный векторный ток сохраняется, поэтому в пределе $m_1 = m_2$ поляризационный оператор векторных токов должен быть поперечным. Очевидно, что в методе размерной регуляризации последнее требование автоматически выполняется – коэффициент при $g_{\mu\nu}$ во втором члене в фигурных скобках тождественно равен нулю.

Задача 17. Во второй лекции говорилось, что в безмассовой электродинамике в двумерном пространстве-времени (модель Швингера) фотон становится массивным. а) Проверить это утверждение, используя (9.43) и учитывая, что константа связи в $D=2$ имеет размерность массы. б) Найти кулоновский потенциал в $D=2$ в древесном приближении и с учётом поляризационного оператора фотона для безмассовых фермионов. в) Найти поляризационный оператор для массивных фермионов и вычислить кулоновский потенциал, подобрав интерполяционную формулу для поляризационного оператора. г) Рассмотреть пределы $t \ll g$ и $t \gg g$.

Интересуясь значением поляризационного оператора при $D=4$, положим $D=4-2\varepsilon$ и устремим ε к нулю. Используя формулу

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \Gamma(1 + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon) , \quad \gamma = -\Gamma'(1) = 0.577\dots - \text{постоянная Эйлера} , \quad (9.44)$$

и отбрасывая зануляющиеся при $\varepsilon \rightarrow 0$ члены, получим

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{\psi} = & \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right) \left[\frac{1}{3} (q^2 g_{\mu\nu} - q_{\mu} q_{\nu}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (m_1^2 + m_2^2 - (+) 2m_1 m_2) \right] + \right. \\ & + \int_0^1 dx [2x(x-1)(q^2 g_{\mu\nu} - q_{\mu} q_{\nu}) + g_{\mu\nu} (m_1^2(1-x) + m_2^2 x - (+) m_1 m_2)] \times \\ & \left. \times \ln \left(\frac{m_1^2(1-x) + m_2^2 x - q^2 x(1-x)}{\mu^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (9.45)$$

При $m_1 = m_2$ результат интегрирования выражается через элементарные функции.

От общего рассмотрения перейдем к интересующему нас вкладу дублета (t, b) в разность $\Delta\Pi$ (см. рис. 9.5):

$$\Delta\Pi^{\psi} \equiv \frac{\Pi_Z^{\psi}(0)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W^{\psi}(0)}{M_W^2}. \quad (9.46)$$

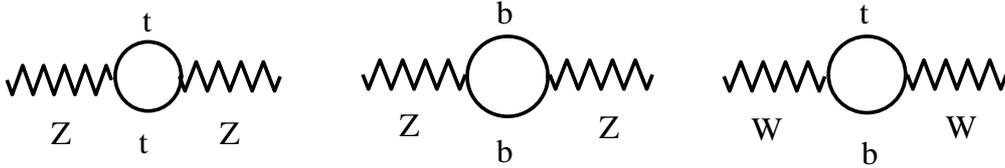


Рис. 9.5. Графики, приводящие к усиленному как $(m_t/m_Z)^2$ вкладу в электрослабые радиационные поправки.

Взаимодействие Z -бозона диагонально и пропорционально $T_3 - Qs^2$. Пропорциональные $Q^2 s^4$ и Qs^2 вклады даются корреляторами векторных токов и зануляются при $q^2 = 0$. Ненулевой вклад дает коррелятор аксиальных токов. В случае W -бозона надо учитывать вклады и векторных, и аксиальных корреляторов (равные в пределе $m_b = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_Z^{\psi}(0)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W^{\psi}(0)}{M_W^2} &= \frac{\bar{g}^2}{16} \frac{\Pi_A^{\psi}(m_t, m_t)}{M_Z^2} - \frac{g^2}{8} \frac{\Pi_A^{\psi}(m_t, 0) + \Pi_V^{\psi}(m_t, 0)}{M_W^2} = \\ &= \frac{\bar{g}^2 \cdot 3}{64\pi^2 M_Z^2} \int_0^1 dx [2m_t^2 \ln(\frac{m_t^2}{\mu^2})] - \frac{g^2 \cdot 3}{32\pi^2 M_W^2} \int_0^1 dx [2m_t^2(1-x) \ln(\frac{m_t^2(1-x)}{\mu^2})] = \\ &= -\frac{g^2 \cdot 2m_t^2 \cdot 3}{32\pi^2 M_W^2} \int_0^1 (1-x) \ln(1-x) dx = \frac{3g^2 m_t^2}{64\pi^2 M_W^2} = \frac{3\bar{\alpha}}{16\pi c^2 s^2} \left(\frac{m_t}{M_Z} \right)^2, \end{aligned} \quad (9.47)$$

где дополнительный фактор 3 возникает от суммирования по трем цветам кварков.

Л Е К Ц И Я № 10

Вычисление поправок $\sim \alpha_W \ln(\frac{m_H}{m_Z})^2$ в поляризаационных операторах векторных бозонов, поправки $\sim \alpha_W \ln(\frac{m_H}{m_Z})^2$ к m_W , g_A и g_V/g_A , фит экспериментальных данных в Стандартной Модели, новая физика.

Начнем эту лекцию с вычисления поправок, зависящих от M_H . Диаграммы, в которых бозон Хиггса испускается фермионами, подавлены как m_f/η , поэтому их учитывать не нужно. Как и в случае t -кварка, остаются лишь поляризаационные операторы векторных бозонов. Удобно проводить вычисления в унитарной калибровке, так как в ней отсутствуют нефизические степени свободы (поля H^\pm и ImH^0). В одной петле нейтральный физический бозон Хиггса H^0 не взаимодействует с фотоном, поэтому нас будут интересовать только поправки к Π_Z и Π_W , отвечающие диаграммам рис. 10.1.

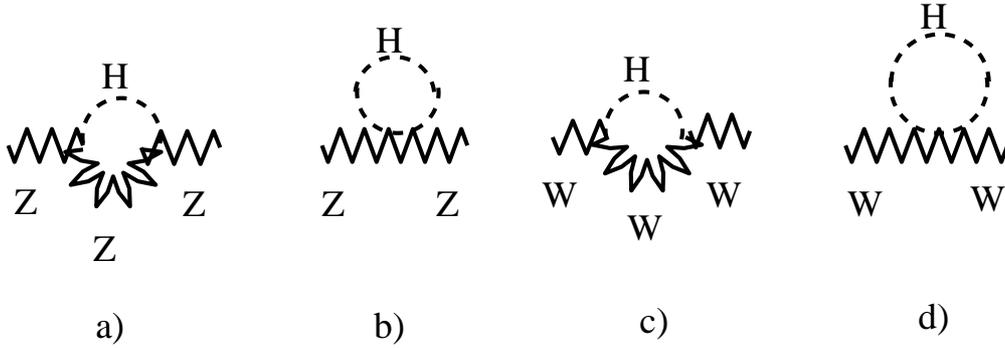


Рис. 10.1. Вклад хиггсовского бозона в поляризаационные операторы векторных бозонов.

Соответствующие константы связи определяются частью лагранжиана (3.16), описывающей кинетическую энергию хиггсовского поля, с заменой производной на ковариантную. Тот же результат можно получить, заменяя в массовых членах векторных полей вакуумное среднее η на $\eta + H^0$:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{g\eta}{2}\right)^2|W|^2 + \left(\frac{\bar{g}\eta}{2\sqrt{2}}\right)^2 Z^2 \rightarrow \left(\frac{g(\eta + H^0)}{2}\right)^2|W|^2 + \left(\frac{\bar{g}(\eta + H^0)}{2\sqrt{2}}\right)^2 Z^2 = \\
 & = \left(\frac{g\eta}{2}\right)^2|W|^2 + \left(\frac{\bar{g}\eta}{2\sqrt{2}}\right)^2 Z^2 + \frac{1}{2}g^2\eta H^0|W|^2 + \frac{g^2}{4}H^{02}|W|^2 + \frac{1}{4}\bar{g}^2\eta H^0 Z^2 + \frac{1}{8}\bar{g}^2 H^{02} Z^2 = \\
 & = M_W^2|W|^2 + gM_W H^0|W|^2 + \frac{1}{4}g^2 H^{02}|W|^2 + \frac{1}{2}M_Z^2 Z^2 + \frac{1}{2}\bar{g}M_Z H^0 Z^2 + \frac{1}{8}\bar{g}^2 H^{02} Z^2. \quad (10.1)
 \end{aligned}$$

Вычислим поправки к Π_W ; поправки к Π_Z даются теми же формулами с заменой M_W на M_Z и g на \bar{g} . Лишние факторы $1/2$ в вершинах взаимодействия H^0 и Z сокращаются увеличением числа спариваний для нейтральных полей Z .

Начнем с диаграммы рис. 10.1 с):

$$-i\Pi_{\mu\nu}^H = -g^2 M_W^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2}}{k^2 - M_W^2} \frac{1}{(k-q)^2 - M_H^2}, \quad (10.2)$$

где верхний индекс “ H ” показывает, что вычисляется вклад, зависящий от массы хиггсовского бозона; знак “ $-$ ” в правой части формулы возник из-за произведения факторов i от пропагаторов и вершин (напомним, что пропагатор W -бозона содержит фактор $-i$). Объединяя пропагаторы и сдвигая переменную интегрирования $k \rightarrow k + xq$, получим

$$i\Pi_{\mu\nu}^H = g^2 M_W^2 \int \frac{d^D k dx}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{g_{\mu\nu} - \frac{(k+xq)_\mu (k+xq)_\nu}{M_W^2}}{[k^2 + (x-x^2)q^2 - xM_H^2 - (1-x)M_W^2]^2}. \quad (10.3)$$

Интегрирование по направлениям вектора k приводит к занулению линейных по k членов и замене $k_\mu k_\nu = \frac{1}{D} g_{\mu\nu} k^2$. Отбрасывая пропорциональную $q_\mu q_\nu$ продольную часть и делая виковский поворот, получим

$$\Pi^H = g^2 M_W^2 \int \frac{d^D k dx}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{1 + \frac{k^2}{DM_W^2}}{[k^2 + (x^2 - x)q^2 + xM_H^2 + (1-x)M_W^2]^2}. \quad (10.4)$$

Интеграл по $d^D k$ возьмем с помощью формулы (9.42):

$$\begin{aligned} \Pi^H &= \frac{g^2 M_W^2}{(2\pi)^D} \int \frac{dx}{\mu^{D-4}} \pi^{D/2} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) [(1-x)M_W^2 + xM_H^2 + x^2q^2 - xq^2]^{\frac{D}{2}-2} + \\ &+ \frac{g^2}{2(2\pi)^D} \int \frac{dx}{\mu^{D-4}} \pi^{D/2} \Gamma(1 - \frac{D}{2}) [(1-x)M_W^2 + xM_H^2 + x^2q^2 - xq^2]^{\frac{D}{2}-1}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Вклад диаграммы рис. 10.1 d):

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4} g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - M_H^2}, \quad \Pi = -\frac{g^2}{4} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{1}{k^2 + M_H^2} = \\ &= -\frac{g^2 \pi^{D/2}}{4(2\pi)^D} \frac{\Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(1 - \frac{D}{2})}{\mu^{D-4} \Gamma(\frac{D}{2})} (M_H^2)^{\frac{D}{2}-1} = -\frac{g^2}{4} \frac{\pi^{D/2}}{\mu^{D-4} (2\pi)^D} \Gamma(1 - \frac{D}{2}) (M_H^2)^{\frac{D}{2}-1} \end{aligned} \quad (10.6)$$

следует прибавить к (10.5). При подстановке $D = 4 - 2\varepsilon$ пропорциональный M_H^2 член при $1/\varepsilon$ в (10.6) компенсирует такой же член в (10.5).

В формулы для физических величин (9.29) и (9.31) входят следующие комбинации поляризационных операторов:

$$\frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2}, \quad \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} \quad \text{и} \quad \Pi'_Z(M_Z^2). \quad (10.7)$$

Очевидно, что добавка (10.6) в этих формулах сокращается, и мы остаемся с выражением (10.5). Положим в нем $D = 4 - 2\varepsilon$ и, отбрасывая зануляющиеся при $\varepsilon \rightarrow 0$ члены, получим

$$\begin{aligned} \Pi^H &= \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) \left[\frac{3}{4} M_W^2 - \frac{1}{4} M_H^2 + \frac{1}{12} q^2 \right] + \\ &+ \frac{g^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ M_W^2 (2 \ln 2 + \ln \pi) - ((1-x)M_W^2 + xM_H^2 + q^2(x^2-x)) \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(1-x)M_W^2 + xM_H^2 + q^2(x^2-x)}{\mu^2} \right] [-(1+x)M_W^2 + xM_H^2 + (x^2-x)q^2] \right\} . \quad (10.8) \end{aligned}$$

При подстановке Π^H в формулы для физических наблюдаемых расходящиеся члены $\sim \frac{1}{\varepsilon}$ не сокращаются, однако, зависящая от массы бозона Хиггса часть $\sim \frac{1}{\varepsilon} M_H^2$ сокращается. Компенсация оставшейся не зависящей от M_H части требует учета вкладов векторных бозонов. Вторая строка в (10.8) также не дает зависящих от M_H вкладов. Таким образом, мы приходим к следующему выражению, содержащему всю зависимость от M_H :

$$\Pi^H = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left[\frac{(1-x)M_W^2 + xM_H^2 + (x^2-x)q^2}{\mu^2} \right] [-(1+x)M_W^2 + xM_H^2 + (x^2-x)q^2] . \quad (10.9)$$

Анализ экспериментальных данных проводится с использованием точной зависимости Π^H от M_H , полученной выше. Мы же изучим асимптотику $M_H^2 \gg M_{W,Z}^2$. Напомним, что хотя сильное неравенство, скорее всего, не выполняется, тем не менее, на сегодняшний день $M_H > 114 \text{ ГэВ} > M_{W,Z}$, поэтому разлагать выражения по отношению M_Z/M_H оправдано. Перепишем (10.9), выделяя ведущие при больших M_H члены:

$$\begin{aligned} \Pi^H &= \frac{g^2}{32\pi^2} \left\{ \int_0^1 dx \cdot xM_H^2 \left[\ln \left(\frac{xM_H^2}{\mu^2} \right) + \ln \left(1 + \frac{(1-x)M_W^2 + (x^2-x)q^2}{xM_H^2} \right) \right] + \right. \\ &\left. + \int_0^1 dx ((x^2-x)q^2 - (1+x)M_W^2) \left[\ln \left(\frac{xM_H^2}{\mu^2} \right) + \ln \left(1 + \frac{(1-x)M_W^2 + (x^2-x)q^2}{xM_H^2} \right) \right] \right\} . \quad (10.10) \end{aligned}$$

Лидирующая асимптотика вклада хиггсовского бозона в $\Pi^H \sim M_H^2 \ln M_H^2$ сокращается в комбинациях поляризационных операторов (10.7); лидирующий вклад бозона Хиггса в физические наблюдаемые дается первым членом в квадратной скобке второй строки формулы (10.10):

$$\Delta \Pi_H = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx ((x^2-x)q^2 - (1+x)M_W^2) \ln \left(\frac{M_H^2}{\mu^2} \right) = -\frac{g^2}{32\pi^2} \left(\frac{3}{2} M_W^2 + \frac{1}{6} q^2 \right) \ln \left(\frac{M_H^2}{\mu^2} \right) . \quad (10.11)$$

Вследствие перенормируемости теории учет вклада петель векторных бозонов приведет к замене μ под знаком логарифма на M_W или M_Z ; в нашем приближении положим $\mu = M_Z$.

Для трех комбинаций поляризационных операторов из формулы (10.7) получим

$$\begin{aligned}\frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} &= -\frac{g^2}{32\pi^2} \frac{1}{6} \ln\left(\frac{M_H^2}{M_Z^2}\right), \\ \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} &= -\frac{\bar{g}^2}{32\pi^2} s^2 \frac{5}{3} \ln\left(\frac{M_H^2}{M_Z^2}\right) + \frac{3\bar{g}^2}{64\pi^2} \left(\frac{m_t}{M_Z}\right)^2, \\ \Pi'_Z(M_Z^2) &= -\frac{\bar{g}^2}{32\pi^2} \frac{1}{6} \ln\left(\frac{M_H^2}{M_Z^2}\right),\end{aligned}\quad (10.12)$$

где мы учли лидирующие вклады от дублета (t, b) и хиггсовского бозона.

Используя формулы (10.12), для физических наблюдаемых получим

$$\begin{aligned}\frac{M_W}{M_Z} &= c + \frac{3\bar{\alpha}c}{32\pi s^2(c^2 - s^2)} \left[\left(\frac{m_t}{M_Z}\right)^2 - \frac{11}{9} s^2 \ln\left(\frac{M_H}{M_Z}\right)^2 \right], \\ g_A &= -\frac{1}{2} - \frac{3\bar{\alpha}}{64\pi c^2 s^2} \left[\left(\frac{m_t}{M_Z}\right)^2 - s^2 \ln\left(\frac{M_H}{M_Z}\right)^2 \right], \\ \frac{g_V}{g_A} &= 1 - 4s^2 + \frac{3\bar{\alpha}}{4\pi(c^2 - s^2)} \left[\left(\frac{m_t}{M_Z}\right)^2 - \left(s^2 + \frac{1}{9}\right) \ln\left(\frac{M_H}{M_Z}\right)^2 \right].\end{aligned}\quad (10.13)$$

Полученные формулы решают задачу о нахождении лидирующих вкладов в радиационные поправки к наблюдаемым, свободным от сильных взаимодействий в древесном приближении. Подставляя измеренное на Тэватроне значение $m_t = 172.6 \pm 1.4$ ГэВ, мы можем определить значение M_H . Оказывается, что для сравнения теоретических формул с экспериментально измеренными значениями параметров Z - и W -бозонов необходим выход за рамки лидирующего приближения – постоянные члены не малы (что неудивительно, т.к. $\ln(M_H/M_Z)^2$ никогда не бывает значительно больше единицы).

Действуя описанным в предыдущей лекции методом, можно получить формулы для физических наблюдаемых, зависящие от четырех параметров: бегущей постоянной тонкой структуры $\bar{\alpha} \equiv \alpha(M_Z)$, постоянной сильного взаимодействия $\hat{\alpha}_s \equiv \hat{\alpha}_s(M_Z)$, массы t -кварка m_t и массы бозона Хиггса M_H . При фитировании экспериментальных данных используются точные однопетлевые выражения, дополненные лидирующими двухпетлевыми вкладами по электрослабым взаимодействиям, плюс различные поправки по сильным взаимодействиям (такие как глюонные поправки к поляризационным операторам векторных бозонов, поправки на реальные и виртуальные глюоны в адронной ширине Z -бозона и т.д.). При этом в квадратных скобках в (10.13) стоят функции V_m , V_A и V_R , а приведенные выражения показывают поведение V_i при больших m_t и M_H .

Таблица 10.1. Фит в Стандартной Модели.

Наблюдаемая	Эксп. значение	Результат фита	“Тяга”
$\Gamma_Z, \text{ ГэВ}$	2.4952(23)	2.4963(15)	-0.5
$\sigma_h, \text{ нб}$	41.540(37)	41.476(14)	1.8
R_l	20.771(25)	20.743(18)	1.1
A_{FB}^l	0.0171(10)	0.0164(2)	0.8
A_τ	0.1439(43)	0.1480(11)	-0.9
R_b	0.2163(7)	0.2158(1)	0.7
R_c	0.172(3)	0.1722(1)	-0.0
A_{FB}^b	0.0992(16)	0.1037(7)	-2.8
A_{FB}^c	0.0707(35)	0.0741(6)	-1.0
$s_l^2 (Q_{\text{FB}})$	0.2324(12)	0.2314(1)	0.8
A_{LR}	0.1513(21)	0.1479(11)	1.6
A_b	0.923(20)	0.9349(1)	-0.6
A_c	0.670(27)	0.6682(5)	0.1
$M_W, \text{ ГэВ}$	80.398(25)	80.377(17)	0.9
$m_t, \text{ ГэВ}$	172.6(1.4)	172.7(1.4)	-0.1
$M_H, \text{ ГэВ}$		84_{-24}^{+32}	
$\hat{\alpha}_s$		0.1184(27)	
$1/\bar{\alpha}$	128.954(48)	128.940(46)	0.3
$\chi^2/n_{\text{d.o.f.}}$		18.1/12	

Опишем результаты фита Стандартной Модели (Высоцкий, Новиков, Окунь, Розанов, лето 2009 г.). Всего имеется 18 наблюдаемых, разбитых в таблице на четыре группы. Первая, наиболее многочисленная, – параметры Z -бозона, измеренные на ускорителе LEP I. Вторая включает в себя три измеренных на ускорителе SLC параметра Z -бозона. В этих измерениях высокая точность достигнута благодаря поляризации начальных электронов. Масса W -бозона с наилучшей точностью измерена на Тэватроне; приведенное значение учитывает также данные LEP II. Наконец, четвертая группа объединяет параметры, по которым делается фит: это измеренная на Тэватроне масса t -кварка, извлекаемая из большого количества данных по e^+e^- -аннигиляции в адроны величина $\bar{\alpha}$, масса бозона Хиггса M_H и постоянная сильного взаимодействия $\hat{\alpha}_s$. Фит производится с помощью компьютерной программы, минимизирующей χ^2 :

$$\chi^2 \equiv \left[\sum_{i=1}^{16} \left(\frac{A_i(\text{эксп}) - A_i(\text{теор})}{\sigma_i} \right)^2 \right]_{\min}, \quad (10.14)$$

где величины $A_i(\text{эксп})$ и ошибки σ_i приведены во втором столбце таблицы, а их теоретические значения зависят от четырех перечисленных выше параметров. Таким образом,

имеется $16 - 4 = 12$ степеней свободы, и качество фита характеризуется значением $\chi^2/n_{\text{d.o.f.}} = 18.1/12$. По графику уровня достоверности для распределения χ^2 для 12 степеней свободы находим вероятность того, что СМ правильно описывает экспериментальные данные. Она близка к 10 %, что неплохо. В третьем столбце таблицы приведены теоретические значения измеряемых при значениях параметров, отвечающих минимуму χ^2 . Наконец, последний столбец содержит “тяги” – разности экспериментальных и теоретических значений, деленные на экспериментальные ошибки (χ^2 есть сумма квадратов тяг). Наибольшее отклонение теории от эксперимента (на уровне трех стандартных отклонений) имеется в A_{FB}^b – асимметрии вперед-назад в рождении $b\bar{b}$ -кварков в распаде Z -бозона.

Величина $\hat{\alpha}_s(M_Z)$ определяется электрослабым фитом с рекордной точностью. Наиболее интересно значение массы бозона Хиггса. Центральное значение исключено прямым ограничением:

$$M_H^{\text{LEP II}} > 114 \text{ ГэВ} ; \quad (10.15)$$

ошибка в величине M_H на уровне 30 ГэВ приводит к тому, что если Стандартная Модель правильно описывает обсуждаемую физику, то бозон Хиггса должен быть легким – весить меньше 200 ГэВ. Большой Адронный Коллайдер ЦЕРН (БАК, или LHC) благодаря большой энергии сталкивающихся протонов и большой светимости за первые годы своей работы должен обнаружить бозон Хиггса и измерить его массу, тем самым проверив СМ. Также на нем может быть существенно улучшена точность измерения массы W -бозона. Надежды на улучшение точности параметров Z -бозона связаны со следующим e^+e^- -коллайдером ILC на энергии сталкивающихся пучков 500 ГэВ – 1 ТэВ, а именно на эксплуатацию этого коллайдера в резонансе Z .

То, что Стандартная Модель неплохо описывает измеренные с высокой точностью параметры промежуточных векторных бозонов, означает, что новая физика (если она существует) должна давать в эти параметры небольшие вклады, не ухудшающие существенным образом достигнутого уровня описания. Из большого разнообразия возможной новой физики удобно выделить подкласс моделей, изменяющих приведенные в таблице значения наблюдаемых только за счет новых вкладов в поляризационные операторы векторных бозонов. В литературе такие поправки называют неявными, или косвенными (*oblique corrections*). К новой физике, приводящей только к поправкам указанного выше типа, относятся дополнительные кварк-лептонные поколения (слабо смешанные с тремя известными), различные расширения хиггсовского сектора, суперсимметричное обобщение Стандартной Модели. Новые вклады в поляризационные операторы приведут к добавкам к функциям V_i , зависящим от параметров новой физики и, в частности, от масс новых частиц. При этом удобно классифицировать модели по поведению поправок в пределе масс новых частиц, много больших, чем массы W - и Z -бозонов. Если в этом пределе поправки зануляются, то говорят о декаплинге (*decoupling*), или отщеп-

лении новой физики. Наиболее известный пример – суперсимметричное обобщение.

Калибровочные токи скалярных партнеров кварков и лептонов являются векторными, несохранение которых мало в пределе, когда универсальный массовый параметр стремится к бесконечности. Спинорные же партнеры калибровочных бозонов и двух хиггсовских дублетов объединяются в вектороподобные мультиплеты, обладающие тем же свойством. Прямые нижние ограничения на массы суперпартнеров, полученные на Тэватроне и LEP II, приводят в силу декаплинга к поправкам к функциям V_i , значительно меньшим (как правило), чем вклады Стандартной Модели. Поэтому суперсимметричное расширение СМ с массами суперпартнеров масштаба нескольких сотен ГэВ не исключено результатами точных измерений. Более того, в таких моделях масса легчайшего нейтрального бозона Хиггса оказывается малой, близкой к массе Z -бозона (см. лекцию 13). Поэтому следующее из фита малое значение M_H может косвенно свидетельствовать в пользу суперсимметричного обобщения Стандартной Модели.

Пример новой физики без декаплинга – четвертое кварк-лептонное поколение. Вклады новых тяжелых кварков и лептонов в поляризационные операторы, как правило, велики, что позволяет исключить большие области масс новых частиц. Тем не менее, существуют значения масс, при которых качество фита не уступает имеющемуся в СМ. Тогда предсказание малой массы бозона Хиггса пропадает: в зависимости от величин масс новых частиц хиггс может быть и легким, и тяжелым. Говоря о четвертом поколении, мы подразумеваем, что массы новых частиц превосходят нижние ограничения, следующие из прямых экспериментов по поиску таких частиц: массы верхнего и нижнего кварков (t' и b') больше 300 ГэВ (Тэватрон), масса заряженного лептона (E) больше 100 ГэВ (LEP II), и, наконец, масса нейтрального лептона (N) больше 45 ГэВ (ширина Z -бозона). Ограничение сверху на массы частиц четвертого поколения следует из требования унитарности амплитуд их перерасеяния.

Важный урок: новая физика без декаплинга может привести к тому, что радиационные поправки потребуют большую массу хиггсовского бозона, порядка нескольких сотен ГэВ.

Сделаем замечание о литературе. В работах по радиационным поправкам к параметрам Z и W наряду с функциями V_i используются два набора других функций: ε_i , где $i = 1, 2, 3$ (Альтарелли, Барбиери, Ядах) и S, T, U (Пескин, Такеучи). ε_i являются линейными комбинациями V_i и в них, так же как и в V_i , дает вклады и Стандартная Модель, и новая физика. Что касается переменных S, T и U , то в них учитывается только вклад новых частиц. Фит экспериментальных данных накладывает ограничения на вклады новой физики в V_i , ε_i и на значения S, T , и U . Эти ограничения зависят от неизвестной на сегодня величины M_H .

Поясним в заключение, почему поправки к параметрам Z и W описываются тремя функциями (или V_i , или ε_i , или S, T и U). Формулы для наблюдаемых содержат

комбинации шести величин:

$$\Pi_Z(M_Z^2), \Pi'_Z(M_Z^2), \Pi_W(0), \Pi_W(M_W^2), \Pi_\gamma(M_Z^2) + 2\frac{s}{c}\Pi_{\gamma Z}(0), \Pi_{Z\gamma}(M_Z^2) . \quad (10.16)$$

С помощью этих шести величин фиксируются три параметра лагранжиана Стандартной Модели: g_0 , g'_0 и η_0 . Оставшиеся три комбинации представляют конечные поправки к параметрам Z и W .

Бег калибровочных констант, состав мультиплетов простейшей $SU(5)$ теории Великого Объединения, распад протона, массы кварков и лептонов, барионная асимметрия Вселенной, проблема иерархий.

Лагранжиан Стандартной Модели содержит слишком много параметров, связь между которыми должна быть установлена более фундаментальной теорией. Все развитие физики вообще и физики элементарных частиц в частности указывает на то, что объяснение явлениям, происходящим на некоторых расстояниях, следует искать на меньших расстояниях. В силу квантовой механики меньшим расстояниям отвечают большие энергии. Теории Великого Объединения реализуют этот путь развития науки. Отправной точкой послужило наблюдение о сближении калибровочных констант связи $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ теории с ростом энергии: наибольшая при низких энергиях константа сильного взаимодействия α_3 падает быстрее всего, падение константы $\alpha_2 = g^2/4\pi$ (меньшей чем α_3 при низких энергиях) происходит медленнее, а самая маленькая константа $U(1)$ -взаимодействия $\alpha' = g'^2/4\pi$ растёт, т.к. для абелевой теории имеет место ноль-заряда (в отличие от асимптотической свободы неабелевых теорий). Тем самым имеется принципиальная возможность объединения этих констант в одну при высоких энергиях. Энергия действительно должна быть очень высокой, так как зависимость от нее логарифмическая, и для изменения в несколько раз низкоэнергетических значений калибровочных констант она должна возрасти на много порядков (так как бег констант возникает за счет петлевых диаграмм, перед логарифмом стоит еще и маленький множитель $\sim \alpha_i/\pi$).

Итак предположим, что на масштабе больших энергий имеется единая теория с одной калибровочной константой g_{GUT} , которая на масштабе M_{GUT} нарушается до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ группы аналогично тому, как $SU(2) \times U(1)$ симметрия электрослабой модели, точная при больших энергиях, на масштабе $M_{W,Z}$ нарушается до квантовоэлектродинамической $U(1)$. Для того, чтобы единая группа включала в себя СМ, ее ранг (число коммутирующих диагональных генераторов) должен быть не меньше суммы рангов $SU(3)$, $SU(2)$ и $U(1)$, т.е. четырех. Поэтому наиболее экономная унитарная группа, на которой и была основана первая Единая Теория Джорджи и Глэшоу, – группа $SU(5)$, имеющая ранг 4.

Рассмотрим калибровочный сектор теории. Всего имеется $5^2 - 1 = 24$ калибровочных бозона, из которых 12 – это хорошо знакомые нам 8 глюонов, W^\pm , Z и фотон, а еще 12 приобретают массу $\sim M_{GUT}$ при спонтанном нарушении $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Для нарушения симметрии $SU(5)$ вводится хиггсовское поле Σ в присоединенном представлении $SU(5)$ (тем самым при выпадении Σ в осадок ранг сохраняющихся симметрий

не понижается, в отличие от случая хиггсовского поля в фундаментальном представлении). Минимум потенциала достигается на конфигурации

$$\langle \Sigma \rangle = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & 2 & 0 \\ & & -3 \\ & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad (11.1)$$

отвечающей нарушению $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Выпишем матрицу полей калибровочных бозонов:

$$\begin{pmatrix} g, Z, \gamma & X & Y \\ X^* & Z, \gamma & W \\ Y^* & W^* & Z, \gamma \end{pmatrix}, \quad (11.2)$$

где g – матрица 3×3 из полей глюонов, X и Y содержат по три комплексных поля – итого шесть новых тяжелых заряженных калибровочных бозонов.

Самое интересное предсказание теорий Великого Объединения возникает при включении в схему кварков и лептонов. Так как взаимодействующие с лептонами W^\pm , Z и фотон входят в тот же мультиплет $SU(5)$, что и глюоны, то лептоны с необходимостью попадают в один мультиплет с кварками. Это означает, что появляются взаимодействия, переводящие лептоны в кварки. Таким образом, барионное и лептонное квантовые числа перестают сохраняться.

Каждое кварк-лептонное поколение содержит 15 левых полей ($\nu_L, e_L^-, e_L^+, u_{Li}, \bar{u}_{Li}, d_{Li}, \bar{d}_{Li}$; аналогично второе и третье поколения), которые входят в 2 неприводимых представления группы $SU(5)$: фундаментальное, размерности 5, и антисимметричное представление размерности 10, образующееся при перемножении двух фундаментальных представлений

$$5 \times 5 = 15_c + 10_a. \quad (11.3)$$

Вид матрицы векторных полей подсказывает, каким образом фермионы должны быть распределены по представлениям $SU(5)$. Начнем с пятерки. Две нижние компоненты – синглеты по $SU(3)$ и дублет по $SU(2)$ – т.е. это $(\nu e)_L$. Три верхние компоненты – синглеты по $SU(2)$, триплет по $SU(3)$. Сумма электрических зарядов по неприводимому представлению $SU(5)$ должна равняться нулю, что однозначно фиксирует $(\bar{d}_i)_L$. Квантовые числа членов десятки фиксируются построением ее путем перемножения двух пятерок. Причем т.к. в десятке находится левый позитрон, следует перемножать

антипятиерки. В результате получим:

$$\Psi_{\bar{5}} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \\ \nu \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad \Psi_{10} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}_3 & -\bar{u}_2 & d_1 & u_1 \\ -\bar{u}_3 & 0 & \bar{u}_1 & d_2 & u_2 \\ \bar{u}_2 & -\bar{u}_1 & 0 & d_3 & u_3 \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & 0 & e^+ \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & -e^+ & 0 \end{pmatrix}_L . \quad (11.4)$$

Т.о. кварки и лептоны попадают в одни и те же представления и, испуская X и Y бозоны, переходят друг в друга. Из-за нарушения барионного и лептонного квантовых чисел протон теряет стабильность. Одна из диаграмм, приводящая к распаду протона, показана на рис. 11.1. Эта диаграмма приводит к доминирующему в $SU(5)$ GUT распаду $p \rightarrow e^+ \pi^0$.

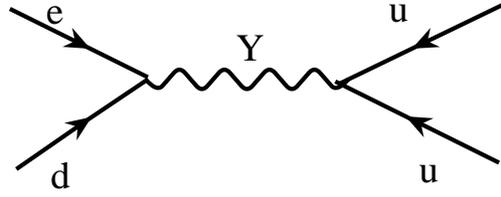


Рис. 11.1. Диаграмма, приводящая к распаду протона.

В теории, основанной на калибровочной группе, не имеющей инвариантной $U(1)$ подгруппы, фотон калибрует суперпозицию неабелевых генераторов, и поэтому сумма электрических зарядов в каждом неприводимом представлении должна быть равна нулю (т.к. пропорциональна сумме шпуров генераторов). Это требование приводит к связям между электрическими зарядами кварков и лептонов:

$$\begin{aligned} Q_\nu + Q_e - 3Q_d &= 0 \quad , \\ 3Q_d - Q_e &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (11.5)$$

В Стандартной Модели мы пришли к тем же соотношениям из требования отсутствия аномалий в токах, с которыми взаимодействуют калибровочные бозоны (см. лекцию 4).

Наше следующее замечание также касается аномалии. Дело в том, что барионный заряд не сохраняется и в рамках Стандартной Модели. Для того, чтобы заметить это, следует записать соответствующий векторный ток как сумму левого и правого токов:

$$j_\mu^B = \bar{u}\gamma_\mu u + \bar{d}\gamma_\mu d \equiv \bar{u}_L\gamma_\mu u_L + \bar{d}_L\gamma_\mu d_L + \bar{u}_R\gamma_\mu u_R + \bar{d}_R\gamma_\mu d_R \quad . \quad (11.6)$$

Неабелевы промежуточные бозоны взаимодействуют только с левым током, поэтому

$$\partial_\mu j_\mu^B \sim \alpha_W W_{\mu\nu}^i \tilde{W}_{\mu\nu}^i, \quad (11.7)$$

где $W_{\mu\nu}^i$ – тензор напряженности для поля A_μ^i , $i = 1, 2, 3$. Такое же равенство имеется и для лептонного тока $j_\mu^L = \bar{e}_L \gamma_\mu e_L + \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L$, таким образом, хотя B и L по отдельности не сохраняются, разность $B - L$ является хорошим квантовым числом, что запрещает, скажем, $n - \bar{n}$ осцилляции.

Несмотря на отсутствие сохранения барионного заряда в СМ, соответствующая вероятность распада протона может быть оценена как

$$\Gamma_p^{SM} \sim M_W e^{-\frac{4\pi}{\alpha_W}} \sim [10^{140} \text{ лет}]^{-1}, \quad (11.8)$$

т.е. ни один из имеющихся на Земле в составе ядер атомов 10^{51} протонов не успевают распасться за все время жизни Вселенной $t_U \sim 10^{10}$ лет. Поэтому если на эксперименте распад протона будет обнаружен, это будет подтверждением идеи, лежащей в основе теорий Великого Объединения. (Однако отметим, что в ранней Вселенной высокая температура снимает подавление переходов с нарушением барионного заряда. Эти т.н. “сфалеронные” переходы пропорциональны бальцмановской экспоненте, $\Gamma \sim \exp(-M_W/(\alpha T))$, и при $T \simeq M_W/\alpha$ подавление пропадает.)

Оценим время жизни протона, отвечающее распаду $p \rightarrow e^+ \pi^0$ в SU(5) GUT согласно диаграмме рис. 11.1, используя $M_{GUT} = 10^{14}$ ГэВ:

$$\Gamma_p^{GUT} \sim \alpha_W^2 \frac{m_p^5}{M_{GUT}^4} \approx [10^{27} \text{ лет}]^{-1}, \quad (11.9)$$

что близко к результатам аккуратных вычислений. Существовавшее до появления Единых Теорий верхнее ограничение на время жизни протона было несколько меньше ($\tau_p > 10^{26}$ лет). Появление Единых Теорий привело к созданию специальных детекторов для поиска распада протона, и современное ограничение $\tau_{p \rightarrow e^+ \pi^0} > 10^{34}$ лет противоречит предсказанию простейшей SU(5)-модели.

Тем не менее, продолжим ее изложение. Для нарушения симметрии $SU(2) \times U(1)$ до $U(1)_{\text{КЭД}}$ и для придания масс кваркам и лептонам вводится хиггсовское поле H в фундаментальном представлении

$$H = \begin{pmatrix} H_1^{+1/3} \\ H_2^{+1/3} \\ H_3^{+1/3} \\ H^0 \\ H^- \end{pmatrix}, \quad (11.10)$$

где $\begin{pmatrix} H^0 \\ H^- \end{pmatrix}$ образует дублет $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ теории, а цветовой триплет H_i с электрическим зарядом $+1/3$ должен получить массы $\sim M_{GUT}$ для подавления возникающего за счет обмена H_i распада протона. Можно написать два $SU(5)$ -инвариантных члена, генерирующих массы кварков и лептонов:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{m_d}{\eta} \Psi_a \Psi^{[ab]} H_b + \frac{m_u}{\eta} \Psi^{[ab]} \Psi^{[cd]} \bar{H}^e \varepsilon_{abcde} , \quad (11.11)$$

где η – вакуумное среднее поля H^0 . Первый член генерирует массы нижних кварков и заряженных лептонов, которые оказываются вырожденными, второй член – массы верхних кварков. При включении трех кварк-лептонных поколений Ψ_5 и Ψ_{10} получают индекс “ i ” ($i = 1, 2, 3$), а m_d и m_u превращаются в матрицы 3×3 .

Равенство $m_d = m_e$ имеет место на шкале M_{GUT} . При изменении масштаба массы, аналогично зарядам, перенормируются. Лидирующий вклад при этом дают обмены глюонами, т.к. α_3 больше других калибровочных констант. С увеличением расстояний массы растут (для масс “асимптотическая свобода” имеет место как в абелевой, так и в неабелевой теории). Соответствующая диаграмма показана на рис. 11.2; в главном логарифмическом приближении имеем

$$\frac{m(M_{GUT})}{m(1 \text{ ГэВ})} = \left[\frac{\alpha(M_{GUT})}{\alpha_3(1 \text{ ГэВ})} \right]^{4/b_3} , \quad b_3 = 11 - \frac{2}{3} N_f = 7 , \quad (11.12)$$

и массы кварков при эволюции от M_{GUT} до 1 ГэВ’а возрастают примерно в 3 раза по сравнению с массами лептонов (мы используем $\alpha(M_{GUT}) \approx 1/40$, $\alpha_3(1 \text{ ГэВ}) \approx 0.2$).

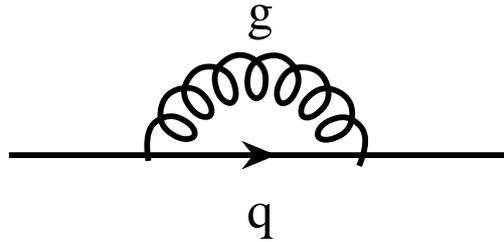


Рис. 11.2. Перенормировка масс кварков.

Этот результат очень хорош для третьего поколения: масса τ -лептона $m_\tau = 1.78$ ГэВ, тогда как $m_b \approx 4.5$ ГэВ, и их отношение близко к трем. Этот успех теории Великого Объединения известен под именем $b - \tau$ унификации. К сожалению, в случае первых

двух поколений мы терпим провал. Удобно составить соотношение, в котором факторы перенормировки сокращаются:

$$\frac{m_d}{m_e} = \frac{m_s}{m_\mu} . \quad (11.13)$$

Будучи ренорм-инвариантным, оно имеет место как на шкале GUT, так и для низ-коэнергетических “полюсных” масс. Подставим значения масс из Таблицы параметров элементарных частиц:

$$\frac{m_s}{m_d} = 17 \div 25 , \quad \frac{m_\mu}{m_e} \approx 200 , \quad (11.14)$$

и мы имеем расхождение с предсказанием (11.13) в 10 раз. Этот дефект теории удастся устранить усложнением хиггсовского сектора: введением 45-плета, дающего массу нижним кваркам и лептонам первых двух поколений. Представление 45 получается перемножением $\bar{5}$ и 10:

$$\bar{5} \times 10 = 5 + 45 .$$

На этом месте оставим проблему масс фермионов и выпишем и решим уравнения, описывающие бег калибровочных констант и их объединение на шкале M_{GUT} . Начнем с нормировок. Константы, отвечающие SU(3) (g_3) и SU(2) ($g_2 \equiv g$), в выражении для ковариантной производной умножаются на генераторы неабелевых симметрий, отнормированных универсальным образом. На фундаментальном представлении имеем

$$\text{tr}T_i^2 = \frac{1}{2} . \quad (11.15)$$

Константа g' умножается на U(1) генератор Y . Найдем его нормировку на кварк-лептонном представлении $\bar{5}$:

$$Y_\nu = Y_e = -1 , \quad Y_{\bar{d}} = -\frac{2}{3} , \quad Y_\nu^2 + Y_e^2 + 3Y_{\bar{d}}^2 = \frac{10}{3} . \quad (11.16)$$

Поэтому нормированная на фундаментальном представлении так же, как g_3 и g_2 , константа g_1 следующим образом связана с константой g' :

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{10}{3} g'^2 = \frac{1}{2} g_1^2 , \quad g_1 = \sqrt{\frac{5}{3}} g' , \quad (11.17)$$

где коэффициент 1/4 появляется потому, что заряд g' умножается на $1/2Y$.

На масштабе Великого Объединения для электрослабого угла смешивания получаем

$$\sin^2 \theta_W = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} = \frac{3/5 g_1^2}{g_2^2 + 3/5 g_1^2} = \frac{3}{8} . \quad (11.18)$$

Начальные значения для аналогичных постоянной тонкой структуры комбинаций $\alpha_i \equiv g_i^2/4\pi$ равны:

$$\hat{\alpha}_2(M_Z) = \frac{\hat{\alpha}(M_Z)}{\hat{s}^2} , \quad \hat{\alpha}_1(M_Z) = \frac{5\hat{\alpha}(M_Z)}{3\hat{c}^2} , \quad (11.19)$$

где мы используем схему вычитаний \overline{MS} , удобную для работы с константой $\hat{\alpha}_3$, величина которой на массовой оболочке не определена из-за инфракрасных расходимостей. Приведем численные значения: $[\hat{\alpha}(M_Z)]^{-1} = 127.93(6)$, $\hat{s}^2 = 0.2310(2)^6$. Бег констант в главном логарифмическом приближении определяется знаменитым уравнением

$$\hat{\alpha}_i(M_{GUT}) = \frac{\hat{\alpha}_i(M_Z)}{1 + (b_i/2\pi)\hat{\alpha}_i(M_Z) \ln(M_{GUT}/M_Z)} , \quad (11.20)$$

где b_i – коэффициенты функции Гелл-Манна-Лоу, определяемые вычислением диаграмм рис. 11.3.

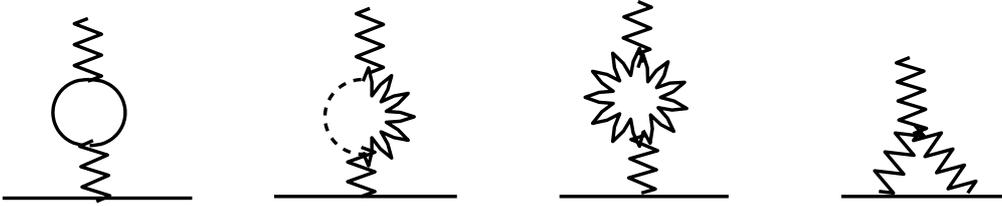


Рис. 11.3. Перенормировка калибровочной константы связи полями материи и векторными полями.

В логарифмический бег $\hat{\alpha}_i$ от M_Z до M_{GUT} вносят вклад легкие частицы: октет глюонов, триплет калибровочных бозонов $SU(2)_L$, три кварк-лептонных поколения и хиггсовский дублет.

Для вычисления b_1 вспомним формулы (9.5) и (9.11), согласно которым дираковский фермион с зарядом единица дает вклад в бег электромагнитного заряда, отвечающий $\Delta b_1 = -\frac{4}{3}$. В нашем случае все фермионы левые, поэтому появляется коэффициент $\frac{1}{2}$. Для вклада одного фермионного поколения получим

$$\Delta b_1^{g'} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \Sigma Y_i^2 = -\frac{1}{6} \left[\frac{10}{3} + 10 \right] = -\frac{20}{9} , \quad (11.21)$$

где первое слагаемое в квадратной скобке описывает вклад антипятиплета, а второе – десятиплета. Учитывая связь g' и g_1 , приходим к следующему вкладу N_G кварк-лептонных поколений:

$$\Delta b_1^\Psi = -\frac{4}{3} N_G . \quad (11.22)$$

⁶В \overline{MS} схеме электрослабый угол смешивания определяется через отношение калибровочных констант; численная близость \hat{s}^2 к приведенному в (9.24) значению $\sin^2 \theta$ является случайной: например, $\hat{\alpha}(M_Z)$ сильно отличается от определенного по формуле (9.5) значения $\alpha(M_Z)$, см. (9.13).

Дублет хиггсов дает следующий вклад:

$$\Delta b_1^H = -\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \Sigma Y_H^2 = -\frac{1}{10} , \quad (11.23)$$

где фактор $3/5$ учитывает переход от g' к g_1 , а следующий за ним фактор $\frac{1}{4}$ возникает от перехода к скалярной частице (сечение $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ в 4 раза больше сечения $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ для точечных π -мезонов). В бег абелевой константы g_1 векторные частицы вклада не дают, поэтому окончательно получим

$$b_1 = -\frac{4}{3}N_G - \frac{1}{10}N_H , \quad (11.24)$$

где N_H – число хиггсовских дублетов. Перейдем к неабелевым константам. Вклад векторных частиц для группы $SU(N)$ равен

$$\Delta b_N^V = +\frac{11}{3} \cdot N , \quad (11.25)$$

где множитель $11/3$ возникает при вычислении интегралов по петлям, а N – значение оператора Казимира в присоединенном представлении. В частности для группы $SU(2)$ $\varepsilon_{abc}\varepsilon_{dbc} = 2\delta_{ad}$ и $N = 2$. Дираковские фермионы в фундаментальном представлении дадут $-\frac{2}{3}$ (уменьшение в 2 раза по сравнению с абелевым случаем происходит в силу (11.15)). В одном поколении имеются 4 дублета киральных фермионов для группы $SU(2)_L$ (три дублета кварков и один лептонный дублет) и 2 триплета дираковских полей кварков для группы $SU(3)_c$. Тем самым вклады кварк-лептонных поколений в b_2 и b_3 равны, и равны их вкладу в b_1 , т.е. $-\frac{4}{3}N_G$. Поэтому различия в беге α_1 , α_2 и α_3 за счет кварков и лептонов не возникает. Наконец, дублет хиггсов дает нулевой вклад в b_3 и $-1/6$ в b_2 (т.к. скалярные поля дают в 2 раза меньший вклад, чем киральные).

Окончательно получим:

$$b_2 = +\frac{22}{3} - \frac{4}{3}N_G - \frac{1}{6}N_H , \quad (11.26)$$

$$b_3 = +11 - \frac{4}{3}N_G . \quad (11.27)$$

До численного анализа объединения констант рассмотрим бег электромагнитной константы в теории с заряженными массивными векторными полями (W -бозонами). Из уравнения, связывающего электромагнитный заряд с g и g' , получим

$$\frac{1}{e^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g'^2} , \quad (11.28)$$

а, значит

$$b_{QED} = b_2 + b' . \quad (11.29)$$

Используя (11.17), (11.24) и (11.26), получим

$$b_{QED} = \frac{22}{3} - \frac{1}{3}N_H - \frac{32}{9}N_G . \quad (11.30)$$

Правая часть полученного уравнения содержит две части: вклад массивного W в минимальном варианте с $N_H = 1$, равный 7 (нейтральный бозон Хиггса не дает вклада в бег e в однопетлевом приближении), и вклады заряженных скалярных $(-1/3)$ и дираковских $(-4/3[3(Q_u^2 + Q_d^2) + Q_e^2] = -32/9)$ полей.

Полученное значение

$$b_{QED}^W = 7 \quad (11.31)$$

совпадает с числом из работы В.С. Ваняшина и М.В. Терентьева 1965 года, в которой подчеркивается “неправильный” знак вклада массивных векторных бозонов в бег α .

Этот результат был получен за четыре года до работы И.Б.Хрипловича, в которой изучалась β -функция неабелевой калибровочной теории $SU(2)$ с безмассовыми векторными бозонами и был получен результат с “неправильным знаком” $b_2 = 22/3$, позже независимо воспроизведенный рядом авторов и послуживший основой для построения теории сильных взаимодействий – асимптотически свободной КХД с инфракрасным “пленением” кварков и глюонов.

В лекции 6 при анализе распада $H \rightarrow 2\gamma$ для легкого бозона Хиггса мы использовали коэффициент в эффективном низкоэнергетическом лагранжиане

$$b = 7 - \frac{16}{9} \quad , \quad (11.32)$$

где первый член – вклад W -бозона, второй – вклад t -кварка ($2m_t, 2M_W \gg m_H$).

Условие объединения выглядит следующим образом:

$$\hat{\alpha}_1(M_{GUT}) = \hat{\alpha}_2(M_{GUT}) = \hat{\alpha}_3(M_{GUT}) \quad , \quad (11.33)$$

и при заданных начальных значениях калибровочных констант мы получаем переопределенную систему (два уравнения на один параметр M_{GUT}). Тем самым проверяется, действительно ли имеет место объединение. Уравнения (11.33) удобно решать следующим образом: известные с хорошей точностью значения $\hat{\alpha}_1(M_Z)$ и $\hat{\alpha}_2(M_Z)$ используются для нахождения M_{GUT} из первого равенства

$$\ln \left(\frac{M_{GUT}}{M_Z} \right) = \frac{30\pi}{110 - N_H} \frac{3/5\hat{c}^2 - \hat{s}^2}{\hat{\alpha}(M_Z)} \quad , \quad (11.34)$$

и для $N_H = 1$, подставляя $\hat{\alpha}(M_Z) = [127.9]^{-1}$, $\hat{s}^2 = 0.2311$, получаем

$$M_{GUT} = 10^{13} \text{ГэВ} \quad . \quad (11.35)$$

Теперь, используя (11.20) для константы $\hat{\alpha}_3$, находим ее значение на виртуальностях порядка M_Z :

$$\hat{\alpha}_3(M_Z) = \frac{\hat{\alpha}_2(M_Z)}{1 + \frac{3}{110 - N_H} (b_2 - b_3) \frac{3 - 8\hat{s}^2}{\hat{s}^2}} = 0.071 \quad , \quad (11.36)$$

что следует сравнить с величиной, получаемой из ширины распада Z в адроны

$$\hat{\alpha}_s(M_Z) = 0.118(3) \quad (11.37)$$

(наиболее точно измеренное значение “постоянной” сильного взаимодействия, см. лекцию 5).

Задача 18. Зависят ли значения M_{GUT} и $\alpha_3(M_Z)$ от числа кварк-лептонных поколений? В чем математическая причина полученного результата?

Итак, подведем итоги. Теории Великого Объединения позволяют установить связи между численными значениями различных параметров, описывающих физику частиц при энергиях ~ 100 ГэВ. Предсказываемое ими нарушение барионного заряда реализует одно из трех условий Сахарова, необходимых для генерации наблюдаемой барионной асимметрии Вселенной: скорее всего, Вселенная состоит из вещества, а примесь антивещества чрезвычайно мала. Эту асимметрию трудно понять, учитывая, что в ранней Вселенной температура была очень велика и плотность кварк-антикварковой плазмы на много порядков превосходила тот избыток кварков, из которого образовалось наблюдаемое в настоящее время вещество. В 1967 году, вскоре после экспериментального открытия нарушения CP-инвариантности, А.Д. Сахаров предложил способ естественной генерации избытка материи в ранней Вселенной. Для этого прежде всего барионный заряд должен нарушаться – иначе его невозможно получить динамически в ходе эволюции ранней Вселенной. Нарушение CP является вторым необходимым условием, обеспечивающим различие скоростей реакций с образованием кварков и антикварков. Тем не менее, в условии термодинамического равновесия конечные плотности барионов и антибарионов оказались бы одинаковыми. Третье условие – отсутствие термодинамического равновесия – обеспечивается расширением Вселенной.

Во времена, когда Сахаров обсуждал генерацию барионной асимметрии, наиболее кардинальным представлялось требование нарушения барионного заряда. Как мы видели, в Единых теориях барионный заряд нарушается. Поясним, как в распадах тяжелых калибровочных бозонов Y генерируется барионная асимметрия. Пусть в ранней Вселенной имелось одинаковое количество частиц (Y) и античастиц (\bar{Y}). Согласно диаграмме рис. 11.1, они распадаются по следующим каналам:

$$\begin{aligned} Y &\rightarrow \bar{u}\bar{u}(\Gamma_{\bar{u}}), & \bar{Y} &\rightarrow uu(\Gamma_u); \\ Y &\rightarrow e^-d(\Gamma_d), & \bar{Y} &\rightarrow e^+\bar{d}(\Gamma_{\bar{d}}). \end{aligned} \quad (11.38)$$

В силу CPT-теоремы полные вероятности распада частиц и античастиц равны:

$$\Gamma_{\bar{u}} + \Gamma_d = \Gamma_u + \Gamma_{\bar{d}}. \quad (11.39)$$

Нарушение C и CP приводит к разным ширинам C -сопряженных мод. Пусть $\Gamma_u > \Gamma_{\bar{u}}$. Тогда в силу (11.39) $\Gamma_d > \Gamma_{\bar{d}}$ и в распадах Y - и \bar{Y} -бозонов нарабатывается некоторый избыток электронов над позитронами и кварков над антикварками, который затем мог бы реализоваться в виде материи в нашей Вселенной. В этом сценарии при распадах тяжелых векторных бозонов нарабатывается барионный заряд B и лептонный заряд L , в то время как их разница $B - L$ равна нулю. Сфалеронные переходы с изменением B и L в Стандартной $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ Модели (см. формулу (11.7) и текст после нее) уничтожают образовавшуюся асимметрию, восстанавливая равновесные распределения кварков и антикварков а также электронов и позитронов. Суммарные барионный и лептонный заряды Вселенной зануляются. Этого эффекта можно избежать, наработав на ранней стадии избыточный (анти) лептонный заряд в виде избытка антинейтрино ($B - L = +1$). При этом роль сфалеронных переходов сведется к переходу части антинейтрино в ddu -кварки, также имеющие суммарный нулевой электрический заряд и $B - L = +1$. Слабые распады $d \rightarrow ue^- \bar{\nu}$ приведут к генерации протонов и электронов и восстановлению начального количества антинейтрино (играющих роль топора в “супе из топора”, из которого рождается материя во Вселенной в этом сценарии). Описанный сценарий превращения избытка лептонов в барионы называется лептогенезисом. Избыток лептонов может быть получен в распадах тяжелых майорановских лептонов N , вводимых для объяснения малых масс нейтрино в механизме see-saw.

Вместе с тем предсказания простейшей теории $SU(5)$ неудовлетворительны: сравни (11.13) и (11.14); (11.36) и (11.37). Время жизни протона также оказывается недопустимо малым.

Перечисленные недостатки простейшей $SU(5)$ могут быть устранены подходящим выбором более высоких представлений $SU(5)$, либо переходом к теориям объединения, основанным на более высоких симметриях ($SO(10)$, E_6 ... Кстати заметим, что в $SO(10)$ GUT фермионы одного семейства помещаются в спинорное представление, имеющее размерность $2^{\frac{10}{2}-1} = 16$. “Лишний” фермион – это правое нейтрино, отсутствующее в представлениях 5 и 10 группы $SU(5)$.)

Имеется еще один “врожденный” недостаток теорий Великого Объединения, о проявлении которого в электрослабой теории уже шла речь в четвертой лекции. Это так называемая проблема иерархий, появляющаяся в теории, если в ней присутствуют фундаментальные скалярные поля. Петлевые поправки к их массам квадратично расходятся, что приводит к следующему выражению для квадрата массы скалярной частицы:

$$m_H^2 = m_0^2 + (c_2 g^2 + c_4 g^4 + \dots) \Lambda^2, \quad (11.40)$$

где Λ – параметр ультрафиолетового обрезания, и мы учли вклады одной, двух, ... петель калибровочных бозонов. Затравочная масса m_0^2 в наших руках, и мы всегда можем подобрать ее так, чтобы петлевые вклады сократились. Поэтому в отличие от 4-

фермионной неперенормируемой модели слабых взаимодействий принципиальных проблем здесь нет: контрчлен перенормировки массы всегда может быть подобран надлежащим способом. Однако требуется точная настройка – при $\Lambda \sim M_P = 10^{19}$ ГэВ надо сократить вклад всех петель вплоть до семнадцатой, т.к. $m_H^2 \sim (100 \text{ ГэВ})^2$ (мы полагаем $g \approx 0.1$). В теориях Великого Объединения в секторе скалярных полей имеются две шкалы масс: $M_W \sim 100$ ГэВ и $M_{GUT} \sim 10^{14}$ ГэВ. Радиационные поправки эти шкалы перемешивают, и опять-таки требуется точная настройка контрчленов для того, чтобы избежать проникновения шкалы M_{GUT} в низкоэнергетический сектор (другой аспект проблемы иерархий).

С проблемой иерархий позволяют справиться суперсимметричные теории, в которых у скаляров появляются фермионные партнеры. Суперсимметрия требует равенства масс скаляров и фермионов как в древесном приближении, так и с учетом петель. В отличие от скаляров фермионные массы перенормируются только логарифмически:

$$m_\Psi = m_{\Psi_0} + \left[\tilde{c}_2 g^2 \ln \left(\frac{\Lambda}{m_{\Psi_0}} \right) + \tilde{c}_4 g^4 \ln^2 \left(\frac{\Lambda}{m_{\Psi_0}} \right) \dots \right] m_{\Psi_0} . \quad (11.41)$$

Так как даже при $\Lambda \sim 10^{19}$ ГэВ логарифм невелик, точная настройка не требуется: уже однопетлевой вклад не превышает затравочной массы. Причина отсутствия квадратичной расходимости – в киральной инвариантности теории, появляющейся при стремлении m_{Ψ_0} к нулю. Поэтому радиационная поправка к массе фермиона должна быть пропорциональна m_{Ψ_0} . Суперсимметрия распространяет это полезное свойство теории на скаляры; в следующих лекциях мы рассмотрим соответствующее суперсимметричное обобщение Стандартной Модели.

Закончим эту лекцию обсуждением присущей теориям Великого Объединения проблемы “пустыни”. Дело в том, что для объединения зарядов требуется переход от энергий 10^2 ГэВ к энергиям 10^{14} ГэВ, т.е. на 12 порядков бóльшая энергия, или меньшие расстояния. И на всем этом интервале мы должны доверять формуле (11.20), а значит думать, что физика не претерпевает никаких кардинальных изменений. Быть может, это предположение слишком наивно. Действительно, знание классической механики, прекрасно описывающей физику на сантиметровых масштабах, не помогает разобраться в ядерной физике. Возможно, “пустыни” нет, и законы физики существенно изменяются на энергиях, много меньших, чем M_{GUT} . Даже если ничего принципиального не происходит, “пустыня” может быть обильно заселена новыми тяжелыми частицами и взаимодействиями, меняющими формулу (11.20).

Суперпространство, алгебра, супермультиплеты, лагранжианы.

Роль различных симметрий в физике элементарных частиц всегда была весьма велика. К примеру, изучаемая нами электрослабая теория основана на локальной $SU(2)_L \times U(1)$ симметрии; $SU(3)$ -симметрия u -, d - и s -кварков играет важную роль в классификации адронов и т.д. Над этими симметриями стоит симметрия Пуанкаре, являющаяся следствием однородности и изотропности пространства-времени. При этом полная симметрия теории является прямым произведением внутренних симметрий и пространственной симметрии. В шестидесятых годах предпринимались интенсивные попытки построить теорию поля по-другому, с тем, чтобы пространственные симметрии диктовали полную симметрию теории. Для этого необходимо расширить группу Пуанкаре, включив в нее дополнительные генераторы нетривиальным образом. Эти генераторы, преобразуясь по несинглетным представлениям при сдвигах и вращениях пространства-времени, приведут к сохранению тензорных величин, отличных от полного импульса и момента импульса сталкивающихся частиц. Было доказано, что реализация описанной конструкции в 4-мерном пространстве-времени требует сохранения индивидуальных импульсов участвующих в реакции частиц – т.е. отсутствия взаимодействия в системе (Коулмен, Мандула, 1967). Суперсимметрия – единственный пример обхода теоремы Коулмена - Мандулы; группа Пуанкаре расширяется введением в нее спинорных генераторов. Первый пример был найден в 1971 году Гольфандом и Лихтманом: один майорановский спинор Q_α , $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Такие теории позже получили название $N = 1$ суперсимметричных теорий. Для работы с майорановскими спинорами удобно перейти к такому представлению γ -матриц, в котором оператор Дирака $p_\mu \gamma_\mu - m$ ($p_\mu = i \frac{\partial}{\partial x_\mu}$) является вещественным. Следуя Берестецкому, Лифшицу, Питаевскому для перехода к майорановскому представлению воспользуемся унитарной матрицей U :

$$\gamma' = U \gamma U^{-1}, \quad U = U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0 \gamma_2 + \gamma_0), \quad U^+ U = 1. \quad (12.1)$$

При этом γ -матрицы стандартного представления, даваемые формулой (4.1), станут чисто мнимыми:

$$\begin{aligned} \gamma'_0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma'_1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma'_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma'_3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}; \\ \gamma'_5 &= \begin{pmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

В дальнейшем, пользуясь только матрицами γ' , будем опускать штрих. Легко проверить, что в представлении Майорана операция зарядового сопряжения $\psi^c = U_c \bar{\psi}$

эквивалентна комплексному сопряжению спинора ($U'_c = UU_cU^T = \gamma'_0$). Майорановским спинором называется вещественный спинор, удовлетворяющий уравнению Дирака в представлении Майорана. На нем реализуется неприводимое представление группы Лоренца. Дираковский биспинор состоит из двух майорановских спиноров.

Алгебра $N = 1$ суперсимметрии простейшим образом реализуется в суперпространстве, содержащем наряду с четырьмя бозонными координатами x_μ майорановский спинор θ , т.е. четыре фермионные координаты. Преобразование суперсимметрии действует в этом пространстве следующим образом:

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow \theta + \varepsilon , \\ x_\mu &\rightarrow x_\mu + \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\theta ,\end{aligned}\quad (12.3)$$

где ε – постоянный майорановский спинор, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^T\gamma_0$. Размерность ε и θ в единицах массы: $[\varepsilon] = [\theta] = (m)^{-1/2}$. Коммутатор двух суперпреобразований сдвигает x_μ на постоянный вектор

$$x_\mu \rightarrow x_\mu + \bar{\varepsilon}_2\gamma_\mu\varepsilon_1 , \quad (12.4)$$

где мы воспользовались равенством $\bar{\varepsilon}_1\gamma_\mu\varepsilon_2 = -\bar{\varepsilon}_2\gamma_\mu\varepsilon_1$, справедливым для майорановских спиноров⁷. Для выполнения (12.4) спинорные генераторы должны удовлетворять следующим перестановочным соотношениям:

$$\{\bar{Q}_\alpha, Q_\beta\} = 1/4\gamma_\mu^{\alpha\beta}P_\mu , \quad (12.5)$$

где P_μ – генератор сдвига, а коммутатор заменен на антикоммутатор, так как Q_α – спиноры. Коммутаторы генераторов сдвига (P_μ) и поворотов ($M_{\mu\nu}$) те же, что и в обычной группе Пуанкаре; спин Q_α равен $1/2$ и он постоянен (не зависит от x_μ). Таким образом, все перестановочные соотношения P , M и Q зафиксированы. Можно проверить, что тождества Якоби выполняются, то есть алгебра $N = 1$ суперсимметрии непротиворечива. Расширенные суперсимметрии включают несколько фермионных генераторов: 2 в случае $N = 2$, 4 в случае $N = 4$ и так далее.

Следующая задача – построение представлений супералгебр. Начнем с массивной суперчастицы. В системе ее покоя $p_\mu = (M, 0)$. От майорановского вещественного 4-компонентного спинора Q_α перейдем к двухкомпонентному комплексному вейлевскому спинору:

$$Q_\alpha^B = \frac{1 + \gamma_5}{2}Q^M , \quad \bar{Q}_\alpha^B = \left(\frac{1 - \gamma_5}{2}Q^M\right) , \quad \alpha = 1, 2 . \quad (12.6)$$

В подходящей нормировке перестановочные соотношения (12.5) дадут (индекс “ B ” в дальнейшем опускаем)

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 , \quad \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \delta_{\alpha\dot{\beta}} , \quad (12.7)$$

⁷Легко убедиться, что для двух майорановских спиноров имеют место следующие равенства: $\bar{\alpha}_1\Gamma\alpha_2 = \bar{\alpha}_2\tilde{\Gamma}\alpha_1$, где $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ для $1, \gamma_5, \gamma_5\gamma_\mu$ и $\tilde{\Gamma} = -\Gamma$ для $\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$.

что совпадает с алгеброй операторов рождения (Q) и уничтожения (\bar{Q}) частиц в квантовой теории поля. В качестве “вакуума” выбираем покоящуюся частицу с полным моментом J , проекцией момента на третью ось J_3 и массой M : $|\Omega\rangle \equiv |J, J_3, M\rangle$. Операторы \bar{Q}_α аннигилируют вакуум

$$\bar{Q}_\alpha |\Omega\rangle = 0. \quad (12.8)$$

Неприводимое представление получается в результате действия операторов “рождения” и имеет следующий вид:

$$|\tilde{J}, \tilde{J}_3, n_1, n_2, M\rangle = Q_1^{n_1} Q_2^{n_2} |\Omega\rangle, \quad (12.9)$$

где (n_1, n_2) принимают значения $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ и $(1,1)$. Его размерность равна $4(2J+1)$ и по состояниям с определенным спином оно разлагается так:

$$(J - \frac{1}{2}, M) + 2(J, M) + (J + \frac{1}{2}, M). \quad (12.10)$$

Числа бозонных и фермионных степеней свободы совпадают.

Рассмотрим два примера. Вакуумное состояние – вещественное поле со спином 0. Суперчастицу образует комплексная скалярная частица и вейлевская частица со спином $1/2$. Следующий случай: вакуумное состояние имеет спин $1/2$. Суперчастицу образуют две частицы со спином $1/2$, одна скалярная и одна векторная частицы.

Перейдем к безмассовым частицам. В системе координат, в которой импульс частицы $p_\mu = (E, 0, -E, 0)$, приходим к следующей алгебре:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 0, \quad \{Q_2, \bar{Q}_2\} = \{Q_2, \bar{Q}_1\} = \{Q_1 Q_2\} = 0, \quad \{Q_1 Q_1\} = 1. \quad (12.11)$$

Выбирая в качестве “вакуума” безмассовую частицу с определенной спиральностью $|\Omega\rangle = |J, \lambda\rangle$, получим, что единственное состояние с ненулевой нормой получается при действии на него оператора Q_1 . Состояния $Q_2 |\Omega\rangle$ и $Q_2 Q_1 |\Omega\rangle$ имеют нулевую норму. В силу СРТ-симметрии неприводимое представление безмассовой суперчастицы содержит 4 состояния: $|\pm \lambda\rangle, |\pm(\lambda + 1/2)\rangle$.

Калибровочные бозоны входят в один супермультиплет с частицами со спином $1/2$ (калибрино). Бозоны Хиггса входят в один супермультиплет с хиггсино, также имеющими спин $1/2$. В результате эффекта Хиггса образуется массивное векторное поле, хиггсовский бозон со спином 0 и дираковская частица со спином $1/2$. В пределе ненарушенной суперсимметрии эти три частицы имеют одну и ту же массу.

Итак, существует нетривиальное расширение группы Пуанкаре спинорным генератором. Является ли описанная конструкция единственно возможной? Теорема Хаага, Лопушанского и Сониуса утверждает, что единственное возможное обобщение сводится к наличию нескольких суперзарядов $Q_i, i = 1, 2, \dots, N$. Выделенными являются $N = 4$ теория (максимальная группа, содержащая спины ≤ 1) и $N = 8$ теория (аналог $N = 4$

для спина, равного 2). Приведем состав частиц $N = 4$ теории Янга-Миллса: одна векторная частица, 4 спинорных, 6 скалярных. Состав частиц $N = 8$ супергравитации таков: 1 частица со спином 2, 8 частиц со спином $3/2$, $8 \cdot 7/2 = 28$ векторных бозонов, $8 \cdot 7 \cdot 6 / (1 \cdot 2 \cdot 3) = 56$ спинорных частиц и 70 скаляров. Эти представления строятся с помощью обобщения алгебры (12.11). Антисимметризатор (12.5) при наличии нескольких генераторов Q_i содержит в правой части δ_{ik} ; возможно обобщение алгебры расширенной суперсимметрии за счет введения т.н. центральных зарядов. При этом мультиплетность представлений может уменьшаться.

Задача 19. Замечательным свойством $N = 4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса является ее конформная инвариантность: β -функция равна нулю во всех порядках теории возмущений. Проверить это утверждение в одной петле.

С точки зрения обобщения обсуждаемой в этих лекциях Стандартной Модели $N = 1$ теория выделена. Дело в том, что имея два или больше генераторов суперсимметрии и начиная с левого фермиона, мы дойдем до правого фермиона, в то время как их свойства относительно электрослабой $SU(2)_L$ -симметрии различны: левые фермионы входят в дублеты, а правые – синглеты. Поэтому если низкоэнергетическая суперсимметрия реализуется в природе, это будет $N = 1$ суперсимметрия. Мы в дальнейшем и ограничимся теориями с $N = 1$.

Построив представления $N = 1$ суперсимметрии, мы должны понять, как писать суперсимметричные лагранжианы. Простейшее представление объединяет скалярную и спинорную частицы. Перейдем от вещественной координаты x_μ и майорановского спинора θ к вейлевскому спинору θ_+ и комплексной координате z_μ :

$$\theta_+ = \frac{1 + \gamma_5}{2} \theta, \quad \theta_- = \theta_+^* = \frac{1 - \gamma_5}{2} \theta, \quad (12.12)$$

$$z_\mu = x_\mu + \frac{1}{4} \bar{\theta} \gamma_\mu \gamma_5 \theta. \quad (12.13)$$

При суперпреобразовании имеем

$$\theta_+ \rightarrow \theta_+ + \varepsilon_+, \quad z_\mu \rightarrow z_\mu + \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \theta_+. \quad (12.14)$$

Простейший супермультиплет образует киральное суперполе S – лоренцев скаляр, зависящий от z_μ и θ_+ : $S(z, \theta_+)$. Разложим его в ряд Тейлора по θ_+ , учитывая, что произведение трех и более θ_+ зануляется:

$$S(z, \theta_+) = A(z) + \theta_+^T \gamma_0 \psi(z) + \frac{1}{2} (\theta_+^T \gamma_0 \theta_+) F(z); \quad (12.15)$$

здесь A и F – комплексные поля, ψ – майорановский спинор. Замечание о размерностях: $[A] = m$, $[\psi] = m^{3/2}$, $[F] = m^2$. Произведение и сумма киральных полей – опять

киральное поле. Используя (12.14), найдем, как компоненты A , ψ и F преобразуются при суперпреобразованиях:

$$\begin{aligned} A(z) &\rightarrow A(z) + \bar{\varepsilon}\psi_+(z) , \\ \psi(z) &\rightarrow \psi(z) - \frac{1 + \gamma_5}{2}\hat{\partial}A(z)\varepsilon + F(z)\varepsilon_+ , \\ F(z) &\rightarrow F(z) - \bar{\varepsilon}\hat{\partial}\psi_+ , \end{aligned} \quad (12.16)$$

где мы использовали тождество Фирца (вывод см. в В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, “Квантовая электродинамика”)

$$(\bar{\lambda}M\chi)(\bar{\psi}N\varphi) = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{16}(\bar{\lambda}MO_iN\varphi)(\bar{\psi}O_i\chi) . \quad (12.17)$$

Здесь $O_i = \{1, \gamma_5, \gamma_\mu, i\gamma_\mu\gamma_5, i\sigma_{\mu\nu}\}$ ⁸. Мы видим, что F -компонента кирального суперполя меняется при суперпреобразовании на полную производную; следовательно, она может использоваться в качестве суперсимметричного лагранжиана

$$L_V = \frac{1}{2}M[S^2]_F + \frac{\lambda}{3}[S^3]_F + \text{к.с.} , \quad (12.18)$$

где к.с. означает комплексное сопряжение. (Соответствующее действие будет инвариантно.) Значок $[\]_F$ означает F -компоненту суперполя; степени S выше третьей приводят к неперенормируемой теории. Вместо значка $[\]_F$ иногда пишут интеграл по θ :

$$[\dots]_F \equiv \int \dots d^2\theta_+ . \quad (12.19)$$

Справедливость этого равенства следует из правил интегрирования по грассмановым переменным:

$$\int d\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} , \quad \int \theta d\theta = 1 , \quad \int 1 d\theta = 0 . \quad (12.20)$$

Запись через интеграл по θ позволяет представить действие как интеграл от лагранжиана по четным (χ_μ) и нечетным (θ) координатам суперпространства.

Распишем лагранжиан (12.18) через компоненты:

$$\frac{1}{2}M[S^2]_F + \text{к.с.} = MAF + MA^*F^* - \frac{M}{2}\bar{\psi}\gamma_5\psi , \quad (12.21)$$

это массовые члены (матрица γ_5 обеспечивает вещественность фермионного вклада при вещественном M);

$$\frac{1}{3}\lambda[S^3]_F + \text{к.с.} = \lambda A^2 F + \lambda A^{*2} F^* - \lambda A \bar{\psi} \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi + \lambda A^* \bar{\psi} \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi , \quad (12.22)$$

⁸Пользуясь тождеством Фирца, для майорановского спинора λ можно получить следующие полезные равенства: $(\bar{\lambda}\lambda)\lambda = -(\bar{\lambda}\gamma_5\lambda)\gamma_5\lambda = \frac{1}{4}(\bar{\lambda}\gamma_\mu\gamma_5\lambda)\gamma_\mu\gamma_5\lambda$; $(\bar{\lambda}\gamma_5\lambda)\lambda_\alpha = -(\bar{\lambda}\lambda)(\gamma_5\lambda)_\alpha$; $(\bar{\lambda}\gamma_5\gamma_\mu\lambda)\lambda = -(\bar{\lambda}\lambda)\gamma_5\gamma_\mu\lambda$; $(\bar{\lambda}\gamma_\mu\gamma_5\lambda)(\bar{\lambda}\gamma_\nu\gamma_5\lambda) = g_{\mu\nu}(\bar{\lambda}\lambda)^2$.

члены, описывающие взаимодействие. Часто используется понятие суперпотенциала, являющегося функцией киральных суперполей S_i : $w = w(S_i)$. Лагранжиан тогда получается интегрированием суперпотенциала по переменным θ_+ :

$$\mathcal{L}_V = \int d^2\theta_+ w(S_i) + \text{к.с.} \equiv [w(S_i)]_F + \text{к.с.} \quad (12.23)$$

В случае (12.18) суперпотенциал имеет следующий вид:

$$w(S) = \frac{1}{2}MS^2 + \frac{1}{3}\lambda S^3 \quad (12.24)$$

Если в качестве аргументов w подставить скалярные компоненты A_i киральных суперполей, то коэффициенты перед произведениями скалярных и спинорных полей в (12.21) и (12.22) даются частными производными w по A_i .

Для того, чтобы суперсимметричным образом ввести кинетические члены, познакомимся с векторным супермультиплетом V – лоренцевым скаляром, зависящим от x_μ и θ : $V(x, \theta)$. Разложим его в ряд Тейлора по θ , учитывая, что максимальная не обращающаяся в ноль степень θ равна четырем ($\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 \neq 0$):

$$\begin{aligned} V(x, \theta) = & A(x) + \bar{\psi}(x)\gamma_5\theta + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)iF(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)G(x) + \frac{1}{4}\bar{\theta}\gamma_\nu\gamma_5\theta iV_\nu(x) + \\ & + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}\chi(x)) + \frac{1}{32}(\bar{\theta}\theta)^2D(x), \quad V^* = V \quad (12.25) \end{aligned}$$

$V(x, \theta)$ содержит два майорановских спинора ψ и χ (8 фермионных степеней свободы вне массовой оболочки), 4 вещественных скаляра A, F, G и D и векторное поле V_ν – 8 бозонных степеней свободы вне массовой оболочки. Сумма и произведение двух векторных суперполей дают векторное суперполе. D -компонента меняется при суперпреобразовании на полную производную, поэтому $\int [V(x, \theta)]_D d^4x \equiv \int V(x, \theta) d^4\theta d^4x$ есть суперинвариант.

Разложим $S(z, \theta_+)$ в ряд по θ :

$$\begin{aligned} S(z, \theta_+) = & A(x) + \bar{\theta}\psi_+(x) + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta_+)F(x) + \\ & + \frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma_\mu\theta_+\partial_\mu A(x) - \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta_+)(\bar{\theta}\hat{\partial}\psi_+(x)) + \frac{1}{32}(\bar{\theta}\theta)^2\partial^2 A(x) \quad (12.26) \end{aligned}$$

Суперинвариантный кинетический член кирального суперполя дает D -компонента произведения S^* на S :

$$-\frac{1}{4}[S^*S]_D \equiv -\frac{1}{4}\int S^*S d^4\theta = [\partial_\mu A]^2 + \frac{1}{2}\bar{\psi}\hat{\partial}\psi + |F|^2 \equiv \mathcal{L}_T \quad (12.27)$$

Лагранжиан модели Весса-Зумино (простейшая суперсимметричная модель) имеет вид

$$\mathcal{L}_{W-Z} = -\frac{1}{4}[S^*S]_D + \left[\frac{1}{2}M[S^2]_F + \frac{1}{3}\lambda[S^3]_F + \text{к.с.} \right] \quad (12.28)$$

При суперпреобразовании \mathcal{L}_{W-Z} меняется на полную производную, что еще раз демонстрирует, что суперсимметрия является пространственной (а не внутренней) симметрией.

Модель содержит два физических поля: комплексный скаляр A и майорановский спинор ψ . Поле F – не динамическое, \mathcal{L} не содержит членов с производными F . Подстановка лагранжева уравнения на F :

$$F = -MA^* - \lambda A^{*2} \quad (12.29)$$

в лагранжиан (12.21, 12.22, 12.27) дает выражение для \mathcal{L}_{W-Z} через физические поля. Потенциальная энергия поля A равна

$$V(A) = |F(A)|^2 = |MA^* + \lambda A^{*2}|^2. \quad (12.30)$$

Суперсимметрия значительно уменьшает количество свободных параметров в теории: массы бозонов и фермионов равны M ; имеется одна безразмерная константа связи λ . Размерная трехбозонная константа выражается через λ и M .

Для построения реалистической модели кроме скаляров и спиноров нужны калибровочные векторные поля. Начнем с абелевой $U(1)$ -симметрии. Киральное суперполе Φ преобразуется с помощью кирального суперполя Λ :

$$\Phi \rightarrow e^{-i\Lambda} \Phi. \quad (12.31)$$

Кинетическая энергия не инвариантна,

$$\Phi^+ \Phi \rightarrow \Phi^+ e^{i\Lambda^*} e^{-i\Lambda} \Phi. \quad (12.32)$$

Для восстановления $U(1)$ -инвариантности вводится векторное суперполе V и выражение для кинетической энергии кирального суперполя изменяется:

$$\Phi^* e^{-2gV} \Phi \rightarrow \Phi^+ e^{i\Lambda^*} e^{-2gV'} e^{-i\Lambda} \Phi, \quad (12.33)$$

$$V' = V + \frac{i}{2g}(\Lambda^* - \Lambda). \quad (12.34)$$

На первый взгляд описанная теория неперенормируема, так как разложение экспоненты содержит высокие степени полей. Однако не все содержащиеся в V поля являются физическими. Выясним, как компоненты V ($C, \chi, M, N, V_\nu, \lambda, D$) изменяются при преобразовании (12.34):

$$\begin{aligned} V + \tilde{\Lambda} + \tilde{\Lambda}^* &= C + A + A^* + \bar{\theta}\gamma_5(\chi + \psi) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)(iM + F - F^*) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)[N + (F + F^*)] + \\ &+ \frac{1}{4}(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\theta)[iV_\mu + \partial_\mu A - \partial_\mu A^*] + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}(\lambda - \hat{\partial}\gamma_5\psi) + \frac{1}{32}(\bar{\theta}\theta)^2[D + \\ &+ \partial^2(A + A^*)]. \end{aligned} \quad (12.35)$$

Видно, что компоненты C, χ, M и N играют ту же роль, что и продольная часть векторного потенциала A_μ в электродинамике. В частности, их можно занулить калибровочным преобразованием. При этом еще останется обычное калибровочное преобразование векторного поля $V_\mu \rightarrow V_\mu + i\partial_\mu(A - A^*)$. Такая калибровка суперполя V называется калибровкой Весса-Зумино

$$V_{WZ} = \frac{i}{4}\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\theta V_\mu(x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}\lambda(x)) + \frac{1}{16}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x) . \quad (12.36)$$

Ее удобство в том, что разложение e^{2gV} в ряд обрывается на втором члене.

Для кинетической энергии кирального суперполя в калибровке Весса-Зумино получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}[\Phi^+ e^{2gV} \Phi]_D &= |(\partial_\mu - igV_\mu)A|^2 + \left[\frac{1}{2}\bar{\psi}(\hat{\partial} - ig\hat{V})\frac{1+\gamma_5}{2}\psi - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2}gA^*\bar{\lambda}\frac{1+\gamma_5}{2}\psi + \text{к.с.}\right] + gDA^*A + |F|^2 . \end{aligned} \quad (12.37)$$

Последнее, что нам осталось для построения суперсимметричного лагранжиана, описывающего взаимодействие кирального и векторного суперполей, это кинетическая энергия векторного супермультиплета. Аналогом тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ служит киральный мультиплет W_α . Для его построения введем ковариантное обобщение производной по грассмановой переменной θ :

$$\begin{aligned} D &\equiv \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{2}\hat{\partial}\theta , \quad \bar{D} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + \frac{1}{2}\bar{\theta}\hat{\partial} , \\ \{D_\alpha, \bar{D}_\beta\} &= (\hat{\partial})_{\alpha\beta} , \quad D_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} D . \end{aligned} \quad (12.38)$$

Легко проверить, что

$$D_- \Phi_+(\theta_+, z) = D_+ \Phi_-(\theta_-, z^*) = 0 , \quad (12.39)$$

поэтому инвариантный относительно калибровочных преобразований (12.34) супермультиплет может быть записан так:

$$W_\alpha = (\bar{D}_+ D_-)(D_+)_\alpha V . \quad (12.40)$$

Поле W_α киральное, т.к. $D_- W_\alpha = 0$. Подставляя в (12.40) выражение (12.36), получим

$$-W_\alpha = \sqrt{2}\lambda_+(z) + [(D(z) - \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}(z)]\theta_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\partial}\lambda_-(z)(\bar{\theta}\theta_+) . \quad (12.41)$$

Выражение для кинетической энергии векторного супермультиплета имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} \int d^2\theta_+ W_\alpha^T \gamma_0 W_\alpha + \text{к.с.} = \frac{1}{2}\bar{\lambda}\hat{\partial}\lambda + \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 . \quad (12.42)$$

Суперинвариантный член $\xi(V)_D = \xi D$ может быть добавлен к лагранжиану $U(1)$ калибровочного поля. В случае неабелевой симметрии поля берутся в присоединенном представлении: $V_\mu \equiv V_\mu^{at^a}$, $\lambda \equiv \lambda^{at^a}$, $D \equiv D^{at^a}$. При этом в формуле (12.42) следует взять шпур по матрицам t :

$$\mathcal{L}_{\text{неабелев}} = 2tr \left[\frac{1}{2} \bar{\lambda} \hat{\partial} \lambda + \frac{1}{2} D^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \right] , \quad (12.43)$$

т.к. $tr t_a t_b = \frac{1}{2} \delta_{ab}$. Ясно, что в неабелевом случае взятие шпура уничтожает ξ -член.

Поле D не является динамическим, так как в лагранжиан не входят его производные; оно аналогично полю F . Подстановка в лагранжиан уравнения на D :

$$D = -g A^* A \quad (12.44)$$

приводит к дополнительному члену в потенциале скалярных компонент киральных полей

$$\Delta V = \frac{1}{2} D(A)^2 \equiv \frac{1}{2} g^2 (A^* A)^2 , \quad (12.45)$$

называемому D -членом (вклад, даваемый формулой (12.30), называется F -членом).

Мы изложили формализм, необходимый для понимания суперсимметричного обобщения Стандартной Модели, которое будет описано в следующей лекции.

Проблема иерархий, состав частиц МССМ, лагранжиан, нарушение суперсимметрии, хиггсовский сектор, бег калибровочных констант, распад протона, рождение суперпартнеров на ускорителях, LSP.

Может ли суперсимметрия реализоваться в природе? Для ответа на этот вопрос следует найти проблему, трудность СМ, разрешить которую позволяет ее суперсимметричное обобщение. В конце семидесятых годов много сил было потрачено на решение возникающей в электрослабой теории проблемы иерархий. Суть этой проблемы – наличие в теории элементарных скалярных полей (хиггсовского мультиплетта; смотри также обсуждение в конце лекции 11). Масштаб масс в теории фиксируется (отрицательным) квадратом массы хиггсовского скалярного поля. Радиационная поправка к этой величине (за счет самодействия хиггсовского поля и его взаимодействия с калибровочными бозонами и фермионами) расходится как квадрат импульса обрезания. Коэффициент при Λ^2 представляет собой сумму членов ряда по константам связи. Скажем, калибровочный сектор дает

$$m_H^2 = m_0^2 + (c_2 g^2 + c_4 g^4 + \dots) \Lambda^2 . \quad (13.1)$$

Поэтому затравочная масса также должна содержать пропорциональную Λ^2 часть со знаком минус наряду с конечным остатком, необходимым для генерации “наблюдаемого” вакуумного среднего хиггсовского поля $\eta \approx 246$ ГэВ.

Масштаб вакуумного среднего хиггсовского поля η не является самым большим в физике: имеется планковский масштаб $M_{Pl} \approx 10^{19}$ ГэВ; возможно, имеется объединение калибровочных констант в одну на масштабе $M_{GUT} \sim 10^{16}$ ГэВ. Если относиться к Λ^2 не как к формальному математическому параметру, а как к числу порядка M_{GUT} или M_{Pl} , то точность компенсации петлевых вкладов затравочной массой должна быть очень высокой, $(\eta/M)^2 \sim 10^{-28} \div 10^{-34}$ (для формальной величины Λ дело обстоит еще хуже, так как она равна бесконечности). “Недокомпенсация” приводит к затягиванию вакуумного среднего хиггсовского поля η , а вместе с ним масс W - и Z -бозонов, кварков и лептонов на шкалу Великого Объединения или на планковский масштаб M_{Pl} . В этом суть проблемы иерархий.

Для решения проблемы иерархий были предложены теории, в которых отсутствуют фундаментальные скалярные поля, а масса калибровочных бозонов возникает за счет ненулевого вакуумного среднего билинейного произведения полей новых кварков – так называемые теории техницвета. Тем самым дублируется микроскопическая теория сверхпроводимости, где феноменологический скалярный параметр порядка Гинзбурга-Ландау оказался плотностью куперовских электронных пар. Однако в этих теориях трудно воспроизвести результаты СМ для петлевых электрослабых радиационных по-

правок, подтверждаемые с хорошей точностью экспериментом: новые кварки дают слишком большие дополнительные поправки. А экспериментальные данные накладывают сильные ограничения на возможность существования дополнительных фермионных поколений.

Альтернативой являются суперсимметричные теории. У хиггсовского бозона появляется фермионный партнер – хиггсино. В силу суперсимметрии (которая сохраняется с учетом радиационных поправок) их массы равны. Масса же фермиона не содержит квадратично расходящихся поправок; расходимость в ней только логарифмическая:

$$m_f = m_f^0 \left[1 + \tilde{c}_2 g^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{m_f^0}\right) + \tilde{c}_4 g^4 \ln^2\left(\frac{\Lambda}{m_f^0}\right) + \dots \right] . \quad (13.2)$$

Поэтому даже при $\Lambda \sim M_{Pl}$ необходимость точной настройки пропадает.

Для того, чтобы квадратично расходящаяся поправка к массе бозона Хиггса не появилась в высших петлях, все частицы должны иметь суперпартнеров. Таким образом появляются входящие в векторный супермультиплет и имеющие спин $1/2$ калибрино (фотино, глюино, W - и Z -бозино) и входящие в киральный супермультиплет скалярные слептоны (или лептино) и скварки (или кваркино).

Наряду с перечисленными частицами минимальная суперсимметричная модель (МССМ) содержит еще один дополнительный дублет хиггсов. Пара дублетов необходима для генерации масс как верхних ($T_3 = +1/2$), так и нижних ($T_3 = -1/2$) фермионов не нарушающим жестко суперсимметрию способом (напомним, что в F -члены входят произведения суперполей одной киральности, и мы не можем использовать сопряженный мультиплет хиггсов; см. ниже) и для компенсации треугольных аномалий (возникающих от петель хиггсино).

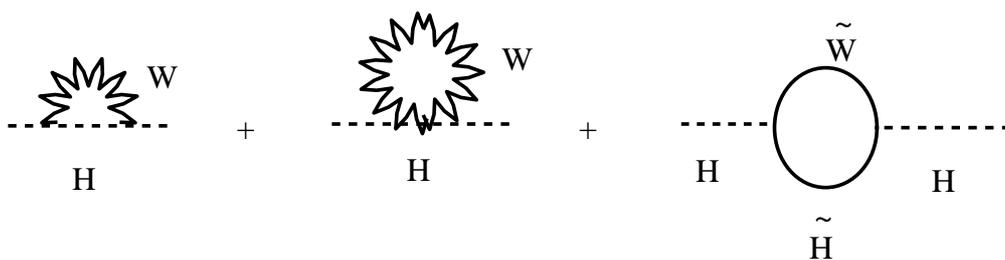


Рис. 13.1. Компенсация квадратичной расходимости в радиационной поправке к массе бозона Хиггса в суперсимметричных теориях.

На диаграммах квадратичная расходимость сокращается так: петля с калибровочным бозоном и хиггсом компенсируется отрицательным вкладом петли с калибрино

и хиггсино (рис. 13.1) (замкнутые фермионные петли содержат знак минус), петля с кварками – петлей с кваркино и т.д. Для точной компенсации массы суперпартнеров должны быть точно равны, чего в природе не наблюдается. Небольшое (в масштабе Λ) несовпадение масс также разрешается. При этом оно должно вводиться так, чтобы вместо Λ^2 в выражении для сдвига массы фигурировал квадрат разности масс суперпартнеров.

Таким образом, точная настройка не требуется, если

$$\frac{g^2}{16\pi^2} \Delta m^2 \lesssim \eta^2, \quad (13.3)$$

и мы приходим к важнейшему для всего сценария требованию: массы суперпартнеров не должны быть много больше 1 ТэВа (известные на сегодняшний день частицы имеют по меньшей мере в десять раз меньшие массы). Нижние ограничения на массы суперпартнеров получаются из отсутствия их рождения на ускорителях максимальных энергий. На тэватроне не видят кваркино и глюино – значит, они должны иметь массу больше 300 - 400 ГэВ. На e^+e^- -коллайдере LEP II не видели заряженных и не участвующих в сильных взаимодействиях лептино и калибрино – значит, они должны быть тяжелее 100 ГэВ.

Измеренные с высокой точностью параметры промежуточных Z - и W -бозонов чувствительны к вкладу новых частиц за счет радиационных поправок. Большое количество суперпартнеров с массами порядка масс Z - и W -бозонов привело бы к большим поправкам, разрушив имеющееся в СМ успешное описание экспериментальных данных (см. лекцию 10).

Вместе с тем в суперсимметричных теориях имеет место подавление вкладов тяжелых частиц. Если массы суперпартнеров больше, чем M_Z , то их вклад степенным образом подавлен:

$$\delta \frac{M_W}{M_Z} \sim g^2 O(M_Z/M_{SUSY})^2. \quad (13.4)$$

Имея в виду прямые ограничения на массы суперпартнеров, мы заключаем, что в основном их вклад в радиационные поправки пренебрежимо мал. Возможное исключение – это вклад стоп-кварков, усиленный, как $m_t^4/M_Z^2 M_{SUSY}^2$, и вклад sneйтрино, если их массы окажутся порядка 50 ГэВ.

Приведем состав частиц МССМ.

SU(2)-мультиплеты частиц первого кварк-лептонного семейства таковы:

$$\hat{Q}_L \equiv \begin{pmatrix} \hat{U} \\ \hat{D} \end{pmatrix}_L, \quad \hat{U}_R^*, \quad \hat{D}_R^*, \quad \hat{L}_L \equiv \begin{pmatrix} \hat{\nu} \\ \hat{E} \end{pmatrix}_L, \quad \hat{E}_R^*, \quad (13.5)$$

где буквы со шляпкой здесь и ниже обозначают киральные мультиплеты, и вместо правых частиц использованы комплексно сопряженные левые мультиплеты. Иметь дело с

полями одной киральности удобно, так как F -член от их произведения является суперинвариантом. Итак, каждый киральный фермион Стандартной Модели получает скалярного партнера: кварк – кваркино, лептон – лептино (другое название – скварки и слептоны). В этой лекции мы считаем нейтрино безмассовыми. Суперсимметризация различных механизмов генерации масс нейтрино не вызывает труда.

Хиггсовский дублет СМ является скалярной компонентой кирального дублета $\hat{H}_1 = (\hat{H}_1^0, \hat{H}_1^-)$. Вакуумное среднее скалярной компоненты H_1^0 дает массы электрону и d -кварку. Для придания массы u -кварку вводится дублет $\hat{H}_2 = (\hat{H}_2^+, \hat{H}_2^0)$. Соответствующие юкавские связи Стандартной Модели обобщаются следующим образом:

$$\Delta\mathcal{L}_Y = \frac{m_u}{\langle H_2^0 \rangle} [\hat{H}_2 \varepsilon \hat{Q}_L \hat{U}_R^*]_F + \frac{m_d}{\langle H_1^0 \rangle} [\hat{H}_1 \varepsilon \hat{Q}_L \hat{D}_R^*]_F + \frac{m_e}{\langle H_1^0 \rangle} [\hat{H}_1 \varepsilon \hat{L}_L \hat{E}_R^*]_F + \text{к.с.} \quad , \quad (13.6)$$

где $\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ обеспечивает SU(2)-инвариантность. В случае трех семейств m_i превращаются в матрицы 3×3 , аналогично описанному в четвертой лекции случаю СМ. Наличие двух хиггсовских дублетов позволяет дописать еще один суперинвариантный член к лагранжиану

$$\Delta\mathcal{L}_\mu = \mu [H_1 \varepsilon H_2]_F + \text{к.с.} \quad , \quad (13.7)$$

где μ – новый параметр теории. Заметим, что четвертичный по полям хиггсов член с произвольной константой связи в суперсимметричных моделях отсутствует – добавка (13.7) приводит к квадратичным членам в потенциале хиггсовских бозонов. Четвертичные члены возникают от D -членов SU(2) и U(1) векторных полей. Спинорные суперпартнеры хиггсовских бозонов называются хиггсино.

Перейдем к векторным бозонам. Глюоны, W - и Z -бозоны и фотон являются членами векторных супермультиплетов. Спинорные глюино, вино, зино и фотино – новые частицы, возникающие в суперсимметричном обобщении СМ. Лагранжианы векторных полей даются формулами (12.42) и (12.43); кинетические члены киральных полей материи (кварков, лептонов, хиггсовских бозонов и их суперпартнеров) описываются членами (12.37).

При спонтанном нарушении SU(2) × U(1) калибровочной симметрии один заряженный и один нейтральный бозоны хиггса “притраиваются” к векторным W^\pm и Z -бозонам, образуя массивные векторные поля. Оставшиеся пять вещественных скалярных полей образуют заряженное хиггсовское поле H^+ и три скалярных поля: CP-нечетное поле A , являющееся смесью полей ImH_1^0 и ImH_2^0 , и два CP-четных поля h и H , являющихся смесями полей ReH_1^0 и ReH_2^0 .

Осталось обсудить спинорные партнеры векторных и хиггсовских бозонов. Два заряженных вейлевских хиггсино, смешиваясь с двумя майорановскими партнерами W -бозонов, образуют два заряженных массивных дираковских поля, называемых чарджи-

но и обозначаемых $\tilde{\chi}_i^\pm$, $i = 1, 2$. Эти поля совместно с векторным W^\pm -бозоном и скаляром H^+ образуют неприводимое представление $N = 1$ суперсимметрии для массивной заряженной суперчастицы (см. пример из лекции 12, после ф-лы (12.10)). В секторе нейтральных частиц фотон и фотино образуют безмассовый мультиплет, одно из спинорных полей и два нейтральных скаляра – массивный мультиплет, а Z -бозон, 2 спинорных поля и один скаляр – массивный векторный мультиплет. Четыре майорановских спинора называются нейтралино, $\tilde{\chi}_i^0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Описанное суперсимметричное обобщение Стандартной Модели предсказывает равенство масс фермионов и бозонов, находящихся в одних супермультиплетах. Отсутствие такого вырождения на опыте требует нарушения суперсимметрии. Самый простой способ – явное нарушение суперсимметрии, сводящееся к добавлению к суперсимметричному лагранжиану членов, утяжеляющих не наблюдавшихся до сих пор на опыте суперпартнеров обычных частиц. При этом необходимо следить за тем, чтобы вводимые в лагранжиан члены не портили механизм компенсации квадратичных расходимостей. Такое нарушение СУСИ называют “мягким”. Введение в суперсимметричный лагранжиан членов размерности 2 (массовые члены скалярных частиц) является мягким. С операторами размерности 3 следует проявлять осторожность: массовые члены спинорных частиц из векторных мультиплетов – мягкие, в то время как массовые члены спинорных частиц из киральных мультиплетов генерируют квадратичные расходимости. Таким образом разрешено “утяжелить” ненаблюдаемые на опыте кваркино, лептино, глюино, вино и т.п. Если обозначить скалярное поле из кирального мультиплета буквой Z , то к лагранжиану можно прибавить слагаемое $Z^3 + Z^{*3}$, в то время как оператор Z^*Z^2 является жестким и его добавление к лагранжиану приводит к квадратичным расходимостям.

Хотя построение реалистических моделей с явным мягким нарушением суперсимметрии возможно, этот механизм следует признать малопривлекательным по трем причинам: во-первых, некрасиво писать в симметричный лагранжиан явно не симметричные члены; во-вторых, предсказательная сила теории слаба, массы всех новых частиц оказываются свободными параметрами; наконец, в-третьих, подавление возникающих нейтральных токов с изменением странности выглядит чрезвычайно искусственным.

Более элегантны модели, в которых суперсимметрия нарушается спонтанно: у суперсимметричного лагранжиана отсутствует суперсимметричное основное состояние. Эта ситуация аналогична эффекту Голдстоуна в теориях с глобальными бозонными симметриями.

При спонтанном нарушении суперсимметрии возникает голдстино – безмассовый фермион. В одной из первых работ, где была открыта суперсимметрия, предлагалось объяснить безмассовость нейтрино, сделав его голдстино (Волков, Акулов, 1972 г.). Эта идея не прошла, т.к. аналогично голдстоуну взаимодействие голдстино пропорциональ-

но его импульсу, см. лекцию 1. Тем не менее усилия пионеров суперсимметрии не пропали даром – пригодилось другое свойство теории.

Аналогично случаю глобальной бозонной симметрии, если оператор Q аннигилирует вакуум, $Q|0\rangle = 0$, то теория суперсимметрична. Суперсимметрия спонтанно нарушена, если $Q|0\rangle \neq 0$. Умножая обе части антикоммутатора (12.5) на γ_0 и беря шпур, получаем $\hat{H} = Q^2$, то есть параметром порядка служит энергия системы. Если в основном состоянии она равна нулю, то суперсимметрия не нарушена; если больше нуля ($\langle \hat{H} \rangle = \langle Q^2 \rangle > 0$), то нарушена.

Довольно быстро были построены теории со спонтанно нарушенной суперсимметрией. В качестве простого примера рассмотрим систему трех киральных полей, взаимодействие которых описывается следующим суперпотенциалом:

$$w(\hat{A}, \hat{B}, \hat{X}) = \mu \hat{A} \hat{B} + \lambda \hat{X} (\hat{A}^2 - \mu^2) , \quad (13.8)$$

где буква со шляпкой обозначает суперполе. Для потенциала скалярных полей получим

$$V = |F_A|^2 + |F_B|^2 + |F_X|^2 , \quad (13.9)$$

где

$$F_A = -\mu B^* - 2\lambda X^* A^* , \quad F_B = -\mu A^* , \quad F_X = -\lambda A^{*2} + \lambda \mu^2 , \quad (13.10)$$

буквы A , B и X обозначают скалярные компоненты соответствующих суперполей. Ясно, что уравнения

$$F_B = 0 \quad \text{и} \quad F_X = 0 \quad (13.11)$$

несовместимы, поэтому в основном состоянии $\langle V \rangle > 0$ и суперсимметрия спонтанно нарушена.

Задача 20. Найдите вакуумные средние скалярных полей A , B и X и волновую функцию голдстино.

Аналогичные примеры с нарушением суперсимметрии могут быть построены и в случае наличия калибровочных взаимодействий. При этом в основном состоянии наряду с отличным от нуля F -членом может быть отличен от нуля и происходящий из векторного супермультиплетта D -член; наряду с (глобальной) суперсимметрией может нарушаться и (локальная) калибровочная симметрия.

К сожалению, построить приемлемую теорию со спонтанным нарушением глобальной суперсимметрии, используя только поля МССМ, не удастся. Дело в том, что в случае спонтанного нарушения глобальной суперсимметрии оказывается равным нулю “супершпур” квадратов масс частиц, находящихся в одном супермультиплетте

$$\sum_J (-1)^{2J+1} M_J^2 = 0 . \quad (13.12)$$

Применяя это равенство к содержащему электрон киральному суперполю, мы видим, что, делая один из скалярных партнеров электрона (скажем, \tilde{e}_L) тяжелым (отсутствие рождения этой частицы на LEP II требует, чтобы она была тяжелее 100 ГэВ), мы получаем большой отрицательный квадрат массы для \tilde{e}_R . Это значит, что поле \tilde{e}_R получает ненулевое вакуумное среднее, тем самым возникает заряженный конденсат и фотон приобретает массу. Описанное явление иллюстрирует следующая простая модель. Пусть в основном состоянии F -член кирального поля A отличен от нуля. Если в суперпотенциале имеется член $\Delta w = \hat{A}\hat{B}^2$, то у скалярного поля B появятся следующие несуперсимметричные массовые члены: $\Delta\mathcal{L} = \langle F_A \rangle [(ReB)^2 - (ImB)^2]$, в то время как масса спинорного поля Ψ_B останется равной своему суперсимметричному значению. Таким образом, комплексное скалярное поле B расщепилось на два вещественных, одно из которых тяжелее спинорного партнера, а другое – легче.

Для преодоления возникшей трудности были построены модели, в которых нарушение суперсимметрии происходит в так называемом скрытом секторе, поля которого не входят в состав МССМ и являются тяжелыми. Также вводятся “переносчики” – поля, взаимодействующие как с полями скрытого сектора, так и с полями МССМ. Эти поля переносят нарушение суперсимметрии в сектор наблюдаемых частиц. Таким образом нарушение суперсимметрии в МССМ возникает на уровне радиационных поправок, что позволяет сделать тяжелыми суперпартнеры наблюдаемых частиц в обход равенства (13.12), так как радиационные поправки не приводят к генерации F -членов в секторе полей МССМ. Последнее утверждение основано на известной теореме о перенормируемости F -членов: петлевые поправки перенормируют только D -члены, так как записываются в виде интеграла по переменным $d^4\theta$, а не по киральным переменным $d^2\theta_+$. Возникающие за счет радиационных поправок эффективные операторы вида $O = \frac{1}{M^2}[\hat{X}^*\hat{X}\hat{e}^*\hat{e}]_D = \frac{|F_X|^2}{M^2}\tilde{e}^*\tilde{e}$ приводят к утяжелению скалярных суперпартнеров. Большой популярностью пользуются модели с “калибровочным переносом нарушения суперсимметрии”, в которых переносчиками являются заряженные по (“нашей”) калибровочной группе МССМ поля. Взаимодействуя с калибровочными суперполями МССМ, они передают им нарушение суперсимметрии на однопетлевом уровне. В сектор кварков и лептонов нарушение суперсимметрии проникает на уровне двух петель за счет взаимодействия последних с калибровочными полями. Кваркино и лептино с одинаковыми проекциями изоспина автоматически получают одинаковые массы, и нарушающие флэйвор нейтральные токи не возникают.

Не останавливаясь на подробном изложении феноменологии моделей с калибровочным переносом нарушения СУСИ, перейдем к супергравитации, которая также может служить переносчиком нарушения суперсимметрии из скрытого сектора в сектор МССМ. Универсальность гравитации с необходимостью приводит к такому переносу – вопрос лишь в величине эффекта.

Как было сказано в начале девятой лекции, суперсимметрия расширяет нетривиальным образом группу Пуанкаре. Последняя является локальной; калибровочным полем, отвечающим генераторам сдвигов P_μ , является гравитон $h_{\mu\nu}$, имеющий спин 2. Описанная конструкция приводит к общей теории относительности Эйнштейна, являющейся единственной самосогласованной теорией безмассового взаимодействующего поля со спином 2 аналогично тому, как электродинамика Максвелла является единственной самосогласованной теорией безмассового поля со спином 1 – фотона.

Для локализации преобразования, отвечающего спинорному генератору Q , вводится гравитино ψ_μ – поле со спином 3/2 (Волков, Сорока, 1973 г.). Суперсимметрия нарушается в скрытом секторе, в результате чего безмассовое гравитино смешивается с безмассовым голдстином, образуя массивную частицу со спином 3/2 (“суперхиггс-эффект”) в полной аналогии с эффектом Хиггса, когда векторное калибровочное поле, смешиваясь с голдстоуновским бозоном, получает массу. Супергравитационные взаимодействия переносят в сектор полей МССМ нарушение суперсимметрии, в результате чего лагранжиан глобальной суперсимметричной теории дополняется членами, мягко нарушающими суперсимметрию. Универсальность этих членов гарантируется универсальностью гравитации.

Получающийся лагранжиан наряду с присущими Стандартной Модели параметрами (массы и углы смешивания кварков, массы лептонов, калибровочные константы) содержит 5 новых параметров: массу скалярных партнеров m_0 , майорановскую массу калибрино $m_{1/2}$, параметр μ (ф-ла (13.7)) и два параметра A и B , характеризующие кубичные и квадратичные взаимодействия скалярных партнеров:

$$\Delta\mathcal{L}_3 = A[\lambda_u H_2 \varepsilon Q_L U_R^* + \lambda_d H_1 \varepsilon Q_L D_R^* + \lambda_e H_1 \varepsilon L_L E_R^*] + \text{к.с.} \quad , \quad (13.13)$$

где большими буквами обозначены скалярные поля, а $\lambda_i \equiv \frac{m_i}{\langle H_{1,2}^0 \rangle}$ – юкавские константы;

$$\Delta\mathcal{L}_2 = B\mu H_1 \varepsilon H_2 \quad . \quad (13.14)$$

Эти 5 параметров фиксируются на планковской шкале, для определения вида низкоэнергетического лагранжиана используются уравнения ренормгруппы. На 5 параметров накладывается одна связь: сумма квадратов вакуумных средних полей хиггсов фиксируется известным из эксперимента значением постоянной Ферми

$$\langle H_1^0 \rangle^2 + \langle H_2^0 \rangle^2 = \eta^2 = \frac{1}{\sqrt{2}G_\mu} \quad . \quad (13.15)$$

В результате МССМ характеризуется значениями четырех независимых параметров, которые, в частности, определяют значения масс нейтральных и заряженных бозонов хиггса и суперпартнеров. Экспериментальные нижние ограничения на массы сужают пространство параметров МССМ. При этом очень важным оказалось нижнее

экспериментальное ограничение на массу легчайшего бозона хиггса h . Оно практически исключает случай близких значений $\langle H_1^0 \rangle$ и $\langle H_2^0 \rangle$, разрешая лишь область $\langle H_2^0 \rangle \gg \langle H_1^0 \rangle$, когда m_h может достигать 125 ГэВ.

До сих пор в качестве мотивации низкоэнергетической суперсимметрии использовалась возможность решения проблемы иерархий. Оказывается, что в физике частиц имеется еще одна проблема, где низкоэнергетическая суперсимметрия позволяет свести концы с концами – это объединение калибровочных констант. В то время как простейшие варианты теорий Великого Объединения терпят провал (см. лекцию 11, уравнения (11.36) и (11.37)), в суперсимметричных обобщениях получается пересечение трех прямых в одной точке (или, что то же самое, предсказываемое значение $\hat{\alpha}_3(M_Z)$ совпадает с измеренным экспериментально).

Определим, как меняются коэффициенты b_i за счет вклада суперпартнеров. Вклад кварков и лептонов, даваемый формулой (11.22), умножится на фактор $1 + 1/2 = 3/2$, где $1/2$ – вклад комплексного скалярного поля, равный половине вклада кирального фермиона. При замене хиггсовского дублета на дублет киральных полей вклад (11.23) умножится на $1 + 2 = 3$ (вклад кирального фермиона в два раза больше вклада комплексного скаляра); наличие второго хиггсовского дублета удваивает вклад хиггсов в b_1 . Итак, в МССМ имеем

$$\tilde{b}_1 = -2N_G - \frac{3}{5} . \quad (13.16)$$

Переходя к неабелевым зарядам, начнем с вклада векторных супермультиплетов. Вклад частиц со спином 1 для группы $SU(N)$ равен $\frac{11}{3}N$, где N – значение оператора Казимира в присоединенном представлении ($f_{abc}f_{abc} = N\delta_{ad}$). Так как майорановские спиноры, являющиеся суперпартнерами векторных частиц, также находятся в присоединенном представлении, то оператор Казимира для них тот же. Он множится на половину вклада дираковского фермиона. В результате вместо (11.25) получим

$$\Delta\tilde{b}_N^V = \frac{11}{3}N - \frac{2}{3}N = 3N . \quad (13.17)$$

Вклад кварков и лептонов такой же, как и в \tilde{b}_1 . Хиггсовские мультиплеты не дают вклада в \tilde{b}_3 ; их вклад в \tilde{b}_2 в два раза меньше вклада одного поколения, поскольку одно поколение содержит 4 дублета $SU(2)$ (3 кварковых и один лептонный), а хиггсовских дублетов всего два. Итак,

$$\tilde{b}_2 = 6 - 2N_G - 1 , \quad (13.18)$$

$$\tilde{b}_3 = 9 - 2N_G . \quad (13.19)$$

Если в Стандартной Модели мы пользовались формулой (11.20), описывающей бег зарядов от M_Z до M_{GUT} , то в суперсимметричных моделях следует “бежать” с несуперсимметричными значениями b_i от M_Z до порога рождения суперпартнеров, и лишь

выше этого порога – со значениями \tilde{b}_i , даваемыми формулами (13.16), (13.18) и (13.19). Но так как массы суперчастиц должны отличаться от M_Z не более чем на порядок, с хорошей точностью правильный результат воспроизведется, если прямо от M_Z начать использовать “суперсимметризованные” значения \tilde{b}_i . Из уравнения (11.20) с учетом (11.19) получим

$$\hat{\alpha}_3(M_Z) = \frac{\tilde{b}_2 - \tilde{b}_1}{3/5\hat{c}^2(\tilde{b}_2 - \tilde{b}_3) + \hat{s}^2(\tilde{b}_3 - \tilde{b}_1)} \hat{\alpha}(M_Z) = \frac{7}{15\hat{s}^2 - 3} \hat{\alpha}(M_Z) = 0.117(1) , \quad (13.20)$$

что прекрасно согласуется с получаемым из анализа распадов Z -бозона значением, в отличие от несуперсимметричной теории Великого Объединения (смотри (11.36) и (11.37)).

Для масштаба объединения в суперсимметричных теориях получим

$$\ln \frac{M_{GUT}}{M_Z} = \frac{3 - 8\hat{s}^2}{14} \pi (\hat{\alpha}(M_Z))^{-1} , \quad (13.21)$$

$$M_{GUT} = 2 \cdot 10^{16} \text{ ГэВ} , \quad (13.22)$$

что на два порядка больше использованного в (11.9) значения. Тем самым снимается еще одна трудность не суперсимметричных теорий Великого Объединения – слишком быстрый распад протона за счет операторов размерности 6. В суперсимметричных теориях доминирует распад протона за счет операторов размерности 5, в простейших единых СУСИ-теориях он также недопустимо быстр.

Поиск суперпартнеров остается одной из главных задач Тэватрона, ЛНС и других проектируемых ускорителей. Некоторые диаграммы, описывающие рождение суперчастиц, приведены на рис. 13.2. Соответствующие сечения зависят от известных из СМ констант связи и от неизвестных масс новых частиц.

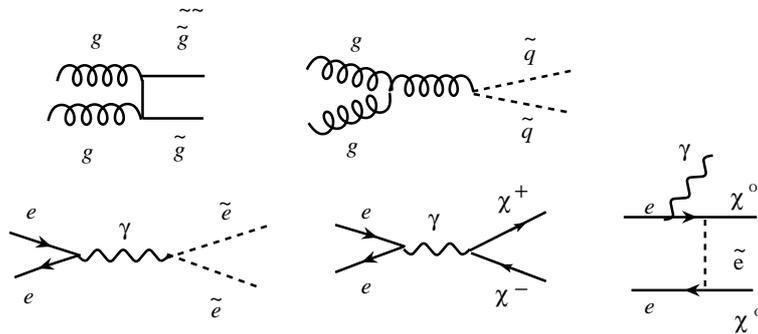


Рис. 13.2. Рождение суперпартнеров в адронных столкновениях и e^+e^- -аннигиляции.

Легко заметить, что в МССМ суперпартнеры могут рождаться только парами, т.к. лагранжиан инвариантен относительно домножения операторов рождения и уничтожения новых частиц на -1. Соответствующая операция получила название R-четности. Диаграммы с распадами новых частиц показаны на рис. 13.3.

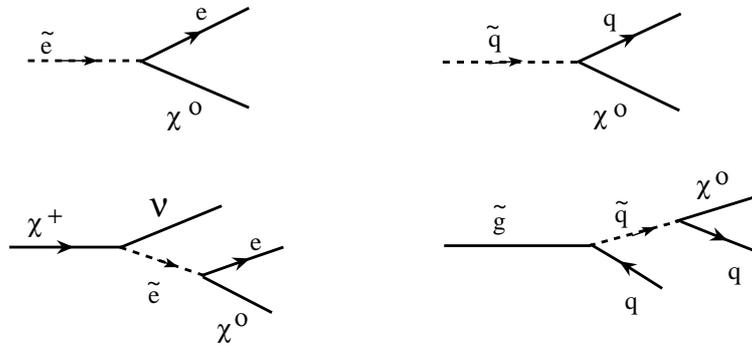


Рис. 13.3. Распад суперпартнеров с образованием LSP.

В силу сохранения R-четности легчайшая суперчастица стабильна; она получила специальное название LSP (Lightest Supersymmetric Particle). Космологическое рассмотрение требует, чтобы LSP была нейтральна и не обладала сильным взаимодействием; поэтому она не детектируется в ускорительном эксперименте. Тем самым возникает четкая сигнатура событий с рождением суперпартнеров: большая доля энергии и импульса “исчезает”, будучи уносимой двумя LSP.

Попарно рождаясь на ранних стадиях эволюции Вселенной, суперчастицы быстро распадаются, образуя наряду с обычными частицами LSP. Последние должны быть электронейтральны и не обладать сильными взаимодействиями. В противном случае современная плотность аномальных изотопов (отличающихся массой от нормальных) оказывается недопустимо большой. (Будучи нейтральной, LSP не захватывает электрон на кулоновскую орбиту и, не обладая сильным взаимодействием, не “прилипает” к ядрам.) Этим требованиям удовлетворяет легчайшее нейтралино (смесь суперпартнеров фотона, Z-бозона и двух нейтральных бозонов Хиггса), описываемое майорановским спинором и обозначаемое символом $\tilde{\chi}_1^0$.

В следующей лекции мы займемся обсуждением космологических последствий наличия в простейших моделях стабильного суперпартнера (LSP).

Концентрация реликтовых протонов в зарядово-симметричной Вселенной – необходимость барионной асимметрии, отсутствие реликтовых антипротонов в нашей Вселенной, реликтовые нейтрино, баланс материи и энергии во Вселенной, нейтралитет – кандидат на роль темной материи.

Наша Вселенная состоит из материи: протонов, нейтронов, электронов. Примесь антиматерии чрезвычайно мала; наблюдаемые в космических лучах антипротоны и позитроны образуются при столкновениях протонов высоких энергий с протонами космической плазмы (хотя часть антиматерии может иметь и более экзотическое происхождение, являясь продуктом аннигиляции или распада частиц темной материи, см. ниже). Как следует из наблюдений, Вселенная в настоящее время расширяется, а значит, температура реликтового излучения падает, $T \sim 1/a(t)$, где $a(t)$ – масштабный фактор. Падает и его плотность, т.к. $n_\gamma \sim T^3$. Средняя плотность барионов за счет расширения Вселенной падает по такому же закону ($n_B \sim 1/a^3$). При этом отношение числа барионов к числу фотонов не меняется и равно примерно одной миллиардной:

$$\eta \equiv n_B/n_\gamma \approx 6 \cdot 10^{-10} . \quad (14.1)$$

Столь малым это отношение было не всегда. Пойдем вспять по времени, к моменту Большого взрыва. Когда температура реликтовых фотонов достигала нескольких сотен МэВ, в их столкновениях интенсивно рождались сильно взаимодействующие частицы. При температурах выше $\Lambda_{\text{КХД}} \approx 300$ МэВ следует говорить о рождении кварк-антикварковых пар. Равновесные плотности кварков и антикварков близки к плотностям фотонов, т.е.

$$(n_B + n_{\bar{B}})/n_\gamma \Big|_{T > \Lambda_{\text{КХД}}} \sim 1 . \quad (14.2)$$

Плотности кварков и антикварков в столь ранние времена являются равновесными, т.к. характерные времена процессов рождения и аннигиляции кварков гораздо меньше времени жизни Вселенной, характеризующего скорость расширения, т.е. скорость изменения равновесных концентраций. Сохранение барионного заряда приводит к тому, что, хотя при $T > \Lambda_{\text{КХД}}$ плотности барионов $n_B, n_{\bar{B}} \sim n_\gamma$, тем не менее суммарный барионный заряд по-прежнему составляет $6 \cdot 10^{-10}$ от числа фотонов, т.е.

$$\frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_B + n_{\bar{B}}} \Big|_{T > \Lambda_{\text{КХД}}} \sim 10^{-9} . \quad (14.3)$$

Такой маленький избыток барионного заряда (миллиард плюс один барион на миллиард антибарионов, или миллиард плюс один кварк на миллиард антикварков) представляется чрезвычайно искусственным начальным условием рождения Вселенной. Естественно

считать, что в момент Большого взрыва возникло состояние, нейтральное по всем зарядам.

Предположим, что начальный барионный заряд Вселенной равен нулю, и вычислим современную концентрацию протонов (равную концентрации антипротонов).⁹ Если бы концентрация барионов оставалась до настоящего времени равновесной, то она бы была подавлена бальцмановской экспонентой

$$(n_{eq}^{B,\bar{B}})_0 \sim e^{-\frac{m_p}{T}} = \exp\left(-\frac{940 \text{ МэВ}}{2.7^\circ \text{ К}}\right) = \exp\left(-\frac{9.4 \cdot 10^8 \text{ эВ}}{2.3 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}}\right) \approx 10^{-(1.8 \cdot 10^{12})}, \quad (14.4)$$

где значок “0” означает современный этап развития Вселенной. Полученное число астрономически мало; в видимой части Вселенной размером в несколько Гигарсек (1 Гпс $\approx 3 \cdot 10^{27}$ см) не оказалось бы ни одного протона.

Оказывается, что приведенная оценка неправильна; остаточная концентрация не является равновесной. При понижении температуры Вселенной ниже $\Lambda_{\text{КХД}}$ концентрация барионов начинает экспоненциально падать, а характерное время реакции аннигиляции $t_r = 1/\sigma nv$ экспоненциально растет (бариону все труднее встретиться с антибарионом). После того, как время реакции сравнивается с характерным временем изменения равновесной концентрации (которое близко ко времени жизни Вселенной к этому моменту t_U , см. ниже) происходит “заморозка” (freezing) – концентрация барионов перестает уменьшаться за счет аннигиляции, уменьшаясь в дальнейшем только за счет общего расширения Вселенной, а отношение концентрации барионов к концентрации фотонов (также падающей за счет расширения Вселенной) не меняется.

Получим кинетическое уравнение Больцмана, описывающее изменение концентрации барионов со временем. Как будет видно, для вычисления остаточной концентрации барионов важными окажутся температуры существенно меньшие, чем 300 МэВ, поэтому следует перейти от протекающих при более высоких температурах реакций с кварками и реакциям с барионами. Начнем со случая стационарной Вселенной. Концентрации барионов и антибарионов падают за счет их аннигиляции в самые легкие адроны – π -мезоны: $p\bar{p} \rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$. Уменьшение концентрации барионов дается следующим уравнением:

$$\frac{dn}{dt} = -\sigma nv \cdot n, \quad (14.5)$$

где скорость реакции описывается множителем σnv (v – скорость протона).¹⁰ Обратная реакция $\pi\pi \rightarrow p\bar{p}$ приводит к увеличению числа барионов и антибарионов. Ясно, что в результате этих (и других возможных) реакций устанавливается равновесная концентрация барионов, зависящая только от температуры: $n_{eq} \equiv n_{eq}(T)$. Иными словами,

⁹Задачу пространственного разделения материи и антиматерии в ходе дальнейшей эволюции такой зарядово-симметричной Вселенной мы пока не рассматриваем – было бы что разделять.

¹⁰Более аккуратно в левой части уравнения записывать плотность протонов, а в скорости реакции – плотность антипротонов. Но в зарядово-симметричной Вселенной эти плотности равны.

если начальная концентрация отличается от термодинамической, то за счет реакций через некоторое время установится термодинамическое равновесие. Если же начальная концентрация равновесная, то со временем она не изменяется.

В силу вышесказанного учет обратной реакции приводит к следующему кинетическому уравнению:

$$\frac{dn}{dt} = -\sigma v(n^2 - n_{eq}^2) , \quad (14.6)$$

согласно которому равновесная концентрация устанавливается экспоненциально быстро с характерным временем $t_r = 1/(\sigma v n_{eq})$.

С учетом расширения Вселенной в отсутствие реакций сохраняется число частиц в единице сопутствующего объема, $n(t)a^3(t)$. Если в настоящее время по определению $a_0 \equiv a(t_0) = 1$ (в пространственно-плоской Вселенной a – безразмерное число), то в ранней Вселенной $a \ll 1$, и те частицы, что сейчас помещаются в одном кубическом сантиметре, раньше занимали гораздо меньший объем. Вместе с тем, время реакции по-прежнему обратно пропорционально числу частиц в кубическом сантиметре $n(t)$.

С учетом сделанных замечаний кинетическое уравнение в расширяющейся Вселенной имеет следующий вид:

$$\frac{d(na^3)}{dt} = -\sigma v(n^2 - n_{eq}^2)a^3 . \quad (14.7)$$

Равновесные плотности протонов и антипротонов равны (Ландау, Лифшиц, “Статистическая физика”, параграф “Равновесие по отношению к образованию пар”):

$$n_p^{eq} = n_{\bar{p}}^{eq} = \begin{cases} \frac{3}{4} g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 , & T \gg m_p \\ g_i \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_p}{T}} , & T \ll m_p \end{cases} , \quad (14.8)$$

где g_i – число спиновых состояний, $g_p = g_{\bar{p}} = 2$, а численное значение дзета-функции $\zeta(3) \approx 1.2$.

Плотность фотонов дается выражением

$$n_\gamma = \frac{2}{\pi^2} \zeta(3) T^3 , \quad (14.9)$$

где температура связана с масштабным фактором формулой

$$T/T_0 = 1/a(t) , \quad (14.10)$$

и мы учли, что $a_0 = 1$ (импульсы и энергии фотонов падают обратно пропорционально увеличению линейных масштабов, т.к. длина волны фотона пропорциональна a).

Вводя отношение $r \equiv n/n_\gamma$, с помощью (14.9) и (14.10) уравнение (14.7) может быть переписано следующим образом:

$$\frac{dr}{dt} = -\sigma v n_\gamma (r^2 - r_{eq}^2) . \quad (14.11)$$

В решении уравнения (14.11) помогает следующее качественное рассмотрение. Уравнение содержит два времени: время реакции $t_r = (\sigma v n_{eq})^{-1}$ и характерное время изменения равновесной плотности

$$t_{exp} \equiv \frac{n_{eq}}{\frac{dn_{eq}}{dt_U}} = \frac{T^2}{m_p} \frac{dt_U}{dT} , \quad (14.12)$$

где t_U – время жизни Вселенной (последнее равенство справедливо при $T < m_p$).

Динамика заполненной изотропным и однородным веществом Вселенной определяется уравнением Фридмана

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho G_N - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} , \quad (14.13)$$

где H – параметр Хаббла, $G_N \equiv 1/M_P^2$ – постоянная Ньютона ($M_P \approx 1.2 \cdot 10^{19}$ ГэВ – масса Планка), $k = 0$ для пространственно-плоской Вселенной (каковой она с большой точностью и является), Λ – космологическая постоянная (ее вкладом при интересующих нас временах можно пренебречь), ρ – плотность энергии заполняющего Вселенную вещества, равная в ультрарелятивистском случае:

$$\left\{ \rho = \begin{array}{ll} \frac{\pi^2}{30} g_i T^4 & \text{– бозоны} \\ \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_i T^4 & \text{– фермионы,} \end{array} \right. \quad (14.14)$$

где g_i – число спиновых степеней свободы ультрарелятивистских частиц, заполняющих Вселенную (2 – для фотонов, 2 – для майорановских нейтрино, 4 – для газа e^+e^- -пар).

Пренебрегая двумя последними слагаемыми в правой части (14.13), подставляя плотность ультрарелятивистских частиц (14.14) и пользуясь связью масштабного параметра с температурой (14.10), найдем, что на радиационно доминирующей стадии расширения (т.е. при $T \geq 1$ эВ) температура Вселенной связана со временем ее жизни следующим образом:

$$t_U = \frac{M_P}{2cT^2} , \quad (14.15)$$

где $c = \sqrt{\frac{8\pi^3}{90}(\Sigma g_b + \frac{7}{8}\Sigma g_f)}$ – константа порядка единицы. Великость массы Планка M_P приводит к тому, что время обусловленных сильным взаимодействием реакций при $T \geq m_p$ гораздо меньше t_{exp} , и закалка происходит лишь при $T \ll m_p$, когда плотность частиц экспоненциально подавлена. Подставляя (14.15) в (14.12) и пренебрегая численными множителями порядка единицы, получим

$$t_{exp} = \frac{T}{m_p} t_U \approx \frac{M_P}{m_p T} . \quad (14.16)$$

Реакция аннигиляции $p\bar{p} \rightarrow \pi\pi$ идет на пороге в s -волне, поэтому $\sigma v \approx \frac{1}{m_\pi^2} \approx \frac{100}{m_p^2}$. Приравнявая время реакции к времени расширения, получим уравнение, определяющее температуру (и момент) закалки

$$n_{eq} \approx (m_p T_3)^{3/2} e^{-\frac{m_p}{T_3}} = \frac{m_p T_3}{M_P \sigma v} . \quad (14.17)$$

Чем больше сечение аннигиляции, тем сильнее выгорают частицы и тем меньше их остается. Вводя переменную $\theta \equiv T/m_p$ (температура в единицах массы протона), получим

$$\frac{e^{1/\theta_3}}{\sqrt{\theta_3}} = m_p M_P \sigma v = 100 \frac{M_P}{m_p} = 10^{21} = e^{48} , \quad (14.18)$$

$\theta_3 = 1/46$, $T_{\text{закалки}} = 20$ МэВ. Для отношения плотности протонов к плотности фотонов в момент закалки имеем

$$r_3 \equiv \left(\frac{n_p}{n_\gamma} \right)_3 \approx \left(\frac{m_p}{T_3} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_p}{T_3}} = (\theta_3)^{-3/2} e^{-1/\theta_3} \approx 10^{-18} . \quad (14.19)$$

В ходе дальнейшего расширения Вселенной в правой части уравнения (14.11) можно пренебречь членом r_{eq}^2 по сравнению с r^2 , после чего оно легко интегрируется. Для отношения протонов к фотонам в наше время получим

$$r_0 \approx \theta_3 r_3 \approx 10^{-20} . \quad (14.20)$$

Полученное число в 10^{11} раз меньше, чем наблюдаемое отношение (14.1). Поэтому зарядово-симметричная Вселенная должна быть отвергнута, и следует искать механизм генерации барионной асимметрии во Вселенной при высоких температурах (BAU, Baryon Asymmetry of the Universe).

Кварк-глюонная плазма ранней Вселенной превращалась в адроны при остывании ниже температуры $\Lambda_{\text{КХД}}$ за счет реакций $q\bar{q} \rightarrow p\bar{q}, n\bar{q}$ и аналогичных, имеющих сечения, характерные для сильного взаимодействия. Остаточная концентрация свободных кварков и антикварков в современной Вселенной при этом дается формулой (14.20), что отвечает одному кварку на 10^{11} нуклонов (Зельдович, Окунь, Пикельнер). Поиски дробнозаряженных кварков привели к ограничению на их концентрацию на много порядков меньше полученной оценки. Конфайнмент кварков разрешает противоречие: кварк всегда найдет партнеров, с которыми образует бесцветный адрон. В этом смысле сечение реакции превращения кварков в бесцветные адроны равно бесконечности – свободных кварков и антикварков в остывающей Вселенной не остается.

Рассмотрим теперь нашу зарядово-асимметричную Вселенную, в которой наблюдаемое отношение избытка барионов к фотонам (14.1) генерируется при достаточно высоких температурах (порядка электрослабого масштаба 100 ГэВ или выше), и вычислим остаточную концентрацию антипротонов. Антипротоны “догорают” на избытке барионов, определяемом соотношением (14.1). При этом для характерного времени этой реакции получим

$$t_r = 1/(\sigma v n_p) = \frac{1}{\sigma v n_\gamma \eta} . \quad (14.21)$$

В отличие от предыдущего случая концентрация $n_p = \eta n_\gamma$ не падает со временем экспоненциально, и время реакции оказывается гораздо меньшим, т.е. закалка антипротонов происходит в более поздние времена при меньших температурах.

Приравнивая время реакции характерному времени расширения, получим

$$\frac{1}{\sigma v \eta \cdot T_3^3} = \frac{M_P}{m_p T_3}, \quad T_3 = m_p \sqrt{\frac{m_p}{100 M_P \eta}} \approx 1 \text{ кэВ}, \quad (14.22)$$

т.е. остаточная концентрация антипротонов пропорциональна $\exp(-m_p/T_3) \sim 10^{-400000}$, и мы не имеем ни одного реликтового антипротона в видимой части Вселенной.

Непосредственным следствием полученного результата является то, что детектируемые в космических лучах антипротоны не являются реликтовыми.

Перейдем к определению концентраций слабо взаимодействующих частиц: нейтрино и нейтралино. За счет обмена виртуальным Z -бозоном пары более тяжелых нейтрино могут аннигилировать в наиболее легкие. Однако сечения этих реакций так малы, что выгорания нейтрино (экспоненциального уменьшения их концентрации) не происходит. Действительно, характерное время реакции аннигиляции при температурах порядка массы тяжелого нейтрино

$$t_r^\nu \approx \frac{1}{\sigma v n_{eq}} = \frac{1}{G_F^2 T^5} \gtrsim \frac{M_P}{T^2} = t_{exp} \quad (14.23)$$

при $T = m_\nu \lesssim 1$ МэВ, т.е. концентрация нейтрино с массой меньше одного МэВ'а за счет аннигиляции не уменьшается; при температурах порядка МэВ'а нейтрино “замерзают”. При температурах порядка МэВ'а “замерзает” также реакция $\nu\bar{\nu} \iff e^+e^-$, т.е. нейтрино отцепляются от электрон-позитрон-фотонной плазмы. Отличие плотности реликтовых нейтрино от плотности реликтовых фотонов обусловлено двумя факторами: различием функций распределения ферми- и бозе-газов (фактор 3/4, см. (14.8)) и увеличением числа фотонов при падении температуры Вселенной ниже 0.5 МэВ за счет аннигиляции e^+e^- -пар в фотоны (фактор 4/11). При современной температуре реликтового излучения $T = 2.73^\circ$ К в кубическом сантиметре находится 400 реликтовых фотонов и, следовательно, около 100 нейтрино каждого сорта (ν_1, ν_2 и ν_3 ; в дираковском случае – еще столько же антинейтрино). Эти нейтрино “отцепились” от электрон-фотонной плазмы, будучи ультрарелятивистскими; в ходе дальнейшего расширения их средний импульс падал пропорционально температуре.¹¹

¹¹До получения космологического ограничения на массы нейтрино сделаем отступление о реликтовых нейтронах. Их концентрация поддерживается реакциями $\bar{\nu}_e p \leftrightarrow e^+ n$, $e^- p \leftrightarrow \nu_e n$ и при температурах, заметно превышающих $\Delta m \equiv m_n - m_p = 1.3$ МэВ, число нейтронов равно числу протонов. Оценка (14.23) справедлива также для поддерживающих протон-нейтронное равновесие реакций: эти реакции “замерзают” при $T \approx 1$ МэВ, когда время жизни Вселенной t_U , даваемое формулой (14.15), равно примерно одной секунде. Более аккуратное вычисление приводит к $T_n = 0.8$ МэВ и $n_n/n_p = e^{-\Delta m/T_n} = 1/5$, один нейтрон на каждые пять протонов. При дальнейшем остывании Вселенной, когда ее температура падает до 70 кэВ (время жизни – около четырех минут), начинается нуклеосинтез: нейтроны с протонами объединяются в дейтерий, после чего идут реакции синтеза более тяжелых ядер. Подавляющее число нейтронов в ходе нуклеосинтеза оказывается в α -частицах,

Данные по анизотропии реликтового излучения показывают, что наша Вселенная с хорошей точностью является пространственно плоской, т.е. сумма плотностей космологического члена (70%), темной материи (25%) и видимой материи (5%) с хорошей точностью равна критической плотности

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G_N} = 10^{-29} \text{ г/см}^3 = 5 \text{ кэВ/см}^3, \quad (14.24)$$

где мы использовали современное значение постоянной Хаббла $H_0 = 70 \text{ км/сек/Мпс}$, $G_N = 1/M_P^2$ – ньютоновская гравитационная постоянная.

В качестве надежного верхнего ограничения мы можем считать, что на являющиеся релятивистскими к моменту рекомбинации нейтрино приходится не более 10% от ρ_c ; тогда мы приходим к следующему верхнему ограничению на сумму масс нейтрино ¹²

$$\sum_i m_{\nu_i} < 5 \text{ эВ}. \quad (14.25)$$

До того, как в конце 90-х годов наличие осцилляций нейтрино и следующие из них значения Δm^2 были надежно установлены, космологическое рассмотрение давало лучшее ограничение на массу мюонного и тау-нейтрино. (Напомним, что измерение β -спектра в распаде трития ограничивает массу ν_e на уровне 2 эВ; в совокупности с измерениями Δm^2 в осцилляциях нейтрино это означает, что $\sum m_{\nu_i} < 6 \text{ эВ}$ – ограничение, близкое к (14.25).)

Буквально проведенное рассмотрение верно для мюонного нейтрино, масса которого ограничена экспериментально данными по $\pi \rightarrow \mu\nu_\mu$ распадам на уровне сотен кэВ. Верхнее экспериментальное ограничение на массу ν_τ , следующее из анализа распадов τ -лептона, заметно хуже ($m_{\nu_\tau} < 20 \text{ МэВ}$), поэтому для ν_τ было не исключено значение $m_{\nu_\tau} > 1 \text{ МэВ}$ и, как следствие, экспоненциальное падение концентрации тау-нейтрино. Прделаем более аккуратное рассмотрение остаточной концентрации тау-нейтрино с массой, превышающей 1 МэВ. Хотя для тау-нейтрино данные по осцилляциям надежно

энергия связи на нуклон в которых максимальна. При рекомбинации электронов (электронвольтовые температуры, время жизни Вселенной – около ста тысяч лет) α -частицы превращаются в ^4He . Согласно наблюдениям, 25% нуклонов во Вселенной существуют в виде ^4He , т.е. на каждый реликтовый нейтрон приходится семь протонов (количество нейтронов уменьшается по сравнению с “закаленным” из-за их распадов). Наблюдаемая распространенность ^4He зависит от числа степеней свободы элементарных частиц, находящихся в тепловом равновесии и являющихся релятивистскими при МэВ’ных температурах, смотри коэффициент s в (14.15). Легко найти, что каждое добавочное к трем существующим легкое нейтрино увеличит T_n , а, следовательно, и концентрацию ^4He на 1.5%. Именно поэтому еще до определения числа поколений с легкими нейтрино по невидимой ширине Z на LEP I и SLC космологи утверждали, что наличие во Вселенной областей с малым содержанием ^4He доказывает, что возможно существование не более чем одного дополнительного поколения.

¹²Аккуратный учёт “разглаживания” зарождающейся в ранней Вселенной структуры ультрарелятивистскими нейтрино позволяет улучшить приводимое ограничение больше, чем на порядок.

исключают эти значения массы, рассмотрение концентрации реликтовых нейтрино (наиболее популярного кандидата на роль темной материи) близко следует случаю тяжелых нейтрино.

Приравнивая время реакции аннигиляции $\nu_\tau \bar{\nu}_\tau \rightarrow \nu \bar{\nu}$, e^+e^- характерному времени изменения равновесной концентрации за счет расширения Вселенной, получим

$$\frac{n_{eq}}{n_\gamma} = \frac{m_\nu T_3}{\sigma v M_P T_3^3} = \left(\frac{n_{\nu_\tau}}{n_\gamma} \right)_0 \frac{1}{\theta_3} , \quad (14.26)$$

где последнее равенство отражает тот факт, что после закалки отношение концентрации нейтрино к концентрации фотонов уменьшается согласно уравнению (14.20). Для массовой плотности тау-нейтрино в настоящее время получим

$$(\rho_{\nu_\tau})_0 = T_0^3 \frac{m_\nu^2 T_3 \theta_3}{G_F^2 m_\nu^2 M_P T_3^3} = \frac{T_0^3}{G_F^2 M_P T_3^2} \theta_3 , \quad (14.27)$$

где мы подставили $\sigma v = G_F^2 m_\nu^2$ для сечения аннигиляции тяжелых нейтрино на пороге, идущей за счет обмена Z -бозоном в s -канале. (Мы предполагаем ν_τ дираковской частицей; для майорановских нейтрино s -волновая аннигиляция подавлена требованием переворота спиральности одного из рождающихся фермионов аналогично случаю $\pi \rightarrow (\mu, e)\nu$ распада, т.к. суммарный спин начальных нейтрино равен нулю в силу принципа Паули. Сечение p -волновой аннигиляции подавлено отношением T_3/m_ν . Уменьшение сечения аннигиляции приводит к росту верхнего предела запрещенного интервала масс майорановских нейтрино.)

Связь температуры закалки с массой нейтрино следует из уравнения на равенство времени реакции аннигиляции и времени изменения равновесной плотности нейтрино:

$$(m_\nu T_3)^{3/2} e^{-\frac{m_\nu}{T_3}} = \frac{m_\nu T_3}{G_F^2 m_\nu^2 M_P} . \quad (14.28)$$

Допуская не более 25% критической плотности в форме играющих роль темной материи реликтовых ν_τ , из (14.27, 14.28) мы получим

$$\theta_3 e^{1/\theta_3} = \frac{T_0^{9/2}}{G_F M_P^{1/2} (\rho_{\nu_\tau})_0^{3/2}} \approx 10^9 , \quad \theta_3 = \frac{1}{24} . \quad (14.29)$$

Отношение m/T в два раза меньше, чем в случае закалки протонов, что отражает малость обусловленного слабым взаимодействием сечения аннигиляции нейтрино по сравнению с сильным сечением аннигиляции протонов. Для массы тау-нейтрино получим: $m_{\nu_\tau} = 5$ ГэВ.

Таким образом, ограничение на плотность энергии во Вселенной исключает следующий диапазон масс тау-нейтрино:

$$5 \text{ эВ} < m_{\nu_\tau} < 5 \text{ ГэВ} . \quad (14.30)$$

Наша следующая задача – определить концентрацию реликтовых нейтрино во Вселенной. Для этого нужно найти сечение аннигиляции пары нейтрино в легкие частицы на пороге. Начнем с аннигиляции $\nu_\tau \bar{\nu}_\tau$ в покое, считая ν_τ дираковскими частицами. Аннигиляция в пару электронных нейтрино $\nu_e \bar{\nu}_e$ описывается диаграммой рис. 14.1.

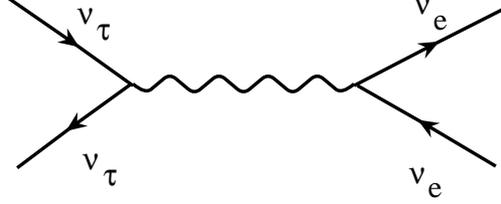


Рис. 14.1. Диаграмма, описывающая аннигиляцию $\nu_\tau \bar{\nu}_\tau \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e$

Вспоминая, что оператор, описывающий $\bar{f}fZ$ взаимодействие, имеет вид $T_3 - Qs^2$, получим для амплитуды аннигиляции

$$M = \frac{\bar{g}^2}{4M_Z^2} \bar{\nu}_\tau \gamma_\alpha \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu_\tau \bar{\nu}_e \gamma_\alpha \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu_e , \quad (14.31)$$

где мы положили $m_{\nu_\tau} \ll M_Z$. Квадрируя амплитуду и усредняя по начальным и суммируя по конечным спиновым состояниям, получим $\overline{\Sigma|M|^2} = 8G_F^2 m_{\nu_\tau}^4$, где мы учли, что $\bar{g}^2/4M_Z^2 = \sqrt{2}G_F$. Для сечения аннигиляции двух нерелятивистских частиц в две ультрарелятивистские частицы легко получить

$$d\sigma = \frac{|M|^2}{8\pi \cdot 8vm^2} \frac{dO}{4\pi} , \quad (14.32)$$

где v – скорость одной из сталкивающихся частиц в системе центра инерции.

Окончательно получим

$$\sigma_{\nu_e \bar{\nu}_e} = \frac{G_F^2 m_{\nu_\tau}^2}{8\pi v} . \quad (14.33)$$

Как вычислить сечение аннигиляции тождественных майорановских фермионов, которыми являются нейтрино? Отнормируемся по ширине распада Z -бозона на пару нейтрино. Ясно, что в безмассовом пределе майорановское нейтрино нельзя отличить от вейлевского, поэтому вероятность распада Z в пару тождественных майорановских нейтрино должна совпадать с шириной Z в пару вейлевских нейтрино, вычисленной в лекции 5. Для амплитуды распада из формулы (5.10), опуская множитель $\bar{g}/2$, получим

$$M_B = \bar{\nu}_2 \gamma_\alpha \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu_1 Z_\alpha . \quad (14.34)$$

Квадрируя амплитуду с учетом ненулевой массы нейтрино, имеем

$$\overline{\Sigma|M_B|^2} = Sp(\hat{k}_2 + m)\gamma_\alpha \frac{1 + \gamma_5}{2} (\hat{k}_1 - m)\gamma_\beta \frac{1 + \gamma_5}{2} \frac{1}{3} \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{q_\alpha q_\beta}{M_Z^2} \right) = \frac{2}{3}(M_Z^2 - m^2) . \quad (14.35)$$

В случае распада на тождественные майорановские фермионы при переходе от записанного через операторы рождения и уничтожения частиц лагранжиана к числовой амплитуде следует учесть, что каждый нейтринный оператор может родить любое из двух образующихся нейтрино (в вейлевском случае оператор рождения нейтрино рождает нейтрино, а оператор рождения антинейтрино рождает антинейтрино). Антисимметрия векторного тока относительно перестановки фермионных операторов приводит к его занулению, аксиальный же ток удваивается:

$$M_M = \bar{\nu}_2 \gamma_\alpha \gamma_5 \nu_1 Z_\alpha , \quad (14.36)$$

что после квадрирования приводит к следующему выражению

$$\overline{\Sigma|M_M|^2} = \frac{4}{3}(M_Z^2 - 4m^2) . \quad (14.37)$$

Фазовый объем в случае образования двух тождественных частиц имеет множитель $1/2!$, что и приводит к равенству вероятностей распада в вейлевском и майорановском случаях при равенстве нулю массы нейтрино. Если же масса нейтрино отлична от нуля, то на пороге $|M_M|^2$ обращается в ноль. Причина зануления в принципе Паули: в s -волне тождественные фермионы имеют полный спин ноль, а значит и полный момент двух майорановских фермионов ноль и векторный Z -бозон не может в них распадаться. Вблизи порога распад идет в p -волне: $M_Z^2 - 4m^2 = 4m^2 v^2$, где v – скорость нейтрино в системе покоя Z .

Наконец всё готово для вычисления сечения аннигиляции нейтралино. Нас интересует LSP, естественным кандидатом на роль которой является легчайшее из четырех нейтралино. Волновая функция нейтралино является суперпозицией волновых функций фотино, зино и двух нейтральных хиггсино. Аннигиляцию фотино в левый электрон и правый позитрон описывает диаграмма рис. 14.2; аналогичная диаграмма описывает аннигиляцию в правый электрон и левый позитрон.

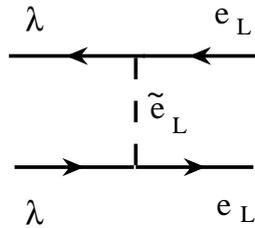


Рис. 14.2. Диаграмма, описывающая аннигиляцию реликтовых нейтралино.

После преобразования Фирца амплитуда процесса $\tilde{\gamma}\tilde{\gamma} \rightarrow e^+e^-$ будет иметь следующий вид:

$$M = \bar{\lambda}\gamma_\mu\gamma_5\lambda\bar{e}\gamma_\mu(a + b\gamma_5)e \quad , \quad (14.38)$$

где λ – обобщенное обозначение нейтралино. Легко понять, что аннигиляция зино и хиггино также приводит к амплитуде, записываемой в виде (14.38). Квадрируя амплитуду аннигиляции и интегрируя по углу вылета лептонов, для сечения аннигиляции медленных нейтралино получим

$$\sigma = \frac{1}{4\pi v} \left[\frac{4}{3}(a^2 + b^2)v^2M^2 + m^2b^2 \right] \quad , \quad (14.39)$$

где M – масса нейтралино, v – скорость нейтралино в системе центра инерции, m – масса электрона. Первый член в квадратных скобках отвечает p -волновой аннигиляции состояния с полным спином единица, второй член – s -волновая аннигиляция состояния с полным спином ноль. Второй член пропорционален квадрату массы электрона, т.к. требуется изменение киральности электрона или позитрона (без изменения киральности рождающееся состояние будет иметь спиральность $+1$ или -1 , что невозможно при распаде системы, имеющей $L = S = J = 0$).

Вычислим амплитуду аннигиляции, отвечающую диаграмме рис. 14.2:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{2 \cdot 4\pi\alpha}{M_{\tilde{e}}^2} \left(\bar{\lambda} \frac{1 + \gamma_5}{2} e \right) \left(\bar{e} \frac{1 - \gamma_5}{2} \lambda \right) = \\ &= -\frac{2\pi\alpha}{M_{\tilde{e}}^2} \sum_{i=1}^{16} \bar{\lambda} O_i \lambda \bar{e} \frac{1 - \gamma_5}{2} O_i \frac{1 + \gamma_5}{2} e = \\ &= \frac{2\pi\alpha}{M_{\tilde{e}}^2} \bar{\lambda}\gamma_\mu\gamma_5\lambda\bar{e}\gamma_\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} e \quad , \end{aligned} \quad (14.40)$$

где мы учли фактор $\sqrt{2}$ в вершине взаимодействия фотино (см. (12.37)) и пренебрегли массой LSP по сравнению с массой скалярного электрона $M_{\tilde{e}}$.

Переходя от операторов к волновым функциям, получим

$$M = \frac{2\pi\alpha}{M_{\tilde{e}}^2} \bar{\lambda}\gamma_\mu\gamma_5\lambda\bar{e}\gamma_\mu(1 + \gamma_5)e \quad , \quad (14.41)$$

что в силу (14.38 и 14.39) приводит к следующему сечению аннигиляции:

$$v\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{M_{\tilde{e}}^4} \left\{ \frac{8}{3}v_\lambda^2M_\lambda^2 + m^2 \right\} \quad . \quad (14.42)$$

В состоянии термодинамического равновесия в ранней Вселенной имеем: $\frac{M_\lambda v^2}{2} = \frac{3}{2}T$, и первый член в фигурных скобках равен $8TM_\lambda$. При $T_3 \approx 1/30M_\lambda$ и величине

массы нейтралино $\gtrsim 50$ ГэВ первый член в фигурных скобках доминирует даже для аннигиляции в пару b -кварков. Ограничившись им, для температуры закалки получаем следующее уравнение:

$$\left(\frac{M_\lambda}{T_3}\right)^{3/2} e^{\frac{M_\lambda}{T_3}} = \frac{M_P}{M_\lambda} 48\pi\alpha^2 \left(\frac{M_\lambda}{M_{\bar{e}}}\right)^4, \quad (14.43)$$

где мы увеличили сечение аннигиляции в 6 раз, чтобы учесть каналы $\bar{e}_{L,R}e_{L,R}$, $\bar{\mu}_{L,R}\mu_{L,R}$, $\bar{\tau}_{L,R}\tau_{L,R}$. Аннигиляцией в пары кварк-антикварк можно пренебречь, т.к. кваркино обычно оказываются значительно (в 2 раза и более) тяжелее лептино. Массы правых и левых лептино также различаются, но не столь заметно. Полагая лептино в два раза тяжелее нейтралино и массу нейтралино равной 50 ГэВ, получим $M_\lambda/T_3 \approx 30$.

Для относительного вклада нейтралино в плотность энергии Вселенной в настоящее время, используя (14.24) и (14.26), получим

$$\Omega_\lambda \equiv \frac{\rho_\lambda}{\rho_c} = \frac{8\pi T_0^3 M_\lambda^2 \theta_3}{3\sigma v M_P^3 T_3^2 H_0^2} = \frac{T_0^3 M_{\bar{e}}^4}{18\alpha^2 M_P^3 M_\lambda^2 H_0^2} \left(\frac{M_\lambda}{T_3}\right)^2, \quad (14.44)$$

где сечение аннигиляции, описываемое первым членом в (14.42), увеличено в шесть раз. Подставляя постоянную Хаббла $H_0 = 70 \frac{\text{км}}{\text{сек}}/\text{Мпс} = (4 \cdot 10^{17} \text{ сек})^{-1}$, современную температуру реликтового излучения $T_0 = 2.7^\circ\text{К} = 2.3 \cdot 10^{-4}$ эВ, $M_\lambda/T_3 = 30$, $M_\lambda = 50$ ГэВ и $M_{\bar{e}} = 100$ ГэВ, получим $\Omega_\lambda \approx 0.2$, что удивительно близко к наблюдаемой величине относительной плотности темной материи $\Omega_{d.m.} = 0.25$.

Суммируя вышесказанное, отметим, что легчайшее нейтралино рассматривается как весьма вероятный кандидат на роль темной материи.

В настоящее время ведется интенсивный экспериментальный поиск темной материи, состоящей из нейтралино. Если нейтралино составляют гало нашей Галактики (что естественно предположить), то локальная плотность $n_\chi \sim \frac{0.3}{m_\chi [\text{ГэВ}]} \text{ см}^{-3}$ примерно в 10^5 раз выше средней плотности нейтралино во Вселенной.

Эксперименты можно разделить на два типа: 1) поиск ядер отдачи от упругого рассеяния нейтралино; 2) поиск продуктов аннигиляции нейтралино из галактического гало (фотонов, позитронов, антипротонов) либо нейтрино, образующихся при аннигиляции накопившихся в ядре Земли (или Солнца) нейтралино.

Скорости нейтралино, удерживаемых за счет гравитации в нашей Галактике, – порядка скоростей звезд: $v_\chi \sim 10^{-3}$ с. Упруго рассеиваясь на ядре детектора, нейтралино передает ему энергию

$$E \leq \frac{M_\lambda v^2}{2} \frac{4M_\lambda/M}{(1 + M_\lambda/M)^2}. \quad (14.45)$$

Максимальная энергия достигается при массе ядра M , равной массе нейтралино, и измеряется десятками кэВ, поэтому детекторы устанавливаются в низкофоновых подземных лабораториях. Число событий зависит от сечения рассеяния нейтралино на ядре

(при столь малых энергиях когерентно складываются амплитуды рассеяния на каждом нуклоне ядра), и от потока нейтралино, обратно пропорционального их массе. Результаты экспериментов представляют в виде исключенных областей в координатах (σ, M_λ) .

Задача 21. Оценить сечения упругого рассеяния нейтралино из гало Галактики на нуклоне и на ядре. Прodelать ту же оценку, когда LSP является sneйтрино.

Вследствие вращения Земли вокруг Солнца поток галактических нейтралино должен иметь годовую периодичность с амплитудой около 10%; в одном из экспериментов наблюдается указание на такую периодичность. Заметим, что вычисляемые сечения рассеяния нейтралино, как правило, оказываются на несколько порядков величины меньше чувствительности современных детекторов, которая близка в пересчете на рассеяние на нуклоне к $\sigma_{\lambda N} = 10^{-7}$ pb. Планируются эксперименты с чувствительностью вплоть до $\sigma_{\lambda N} = 10^{-10}$ pb, достаточной для исследования существенной области параметров СУСИ-моделей.

Что касается аннигиляции реликтовых нейтралино, то в настоящее время их скорости настолько малы, что в сечении аннигиляции, даваемом формулой (14.42), преобладает второй член в фигурных скобках. Таким образом, доминирует аннигиляция в пары $b\bar{b}$ и $\tau\bar{\tau}$. Характеристики распадов прелестных адронов и τ -лептонов в настоящее время хорошо изучены, поэтому можно предсказать состав и спектр частиц, образующихся при аннигиляции нейтралино.

Я глубоко благодарен своему учителю Льву Борисовичу Окуню, на лекциях которого я познакомился с теорией электрослабых взаимодействий.

Я благодарен М.Б. Волошину, О.В. Лычковскому и В.А.Новикову за полезные замечания и Е.А.Ильиной за помощь в оформлении рукописи.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 08-02-00494 и НШ-4568.2008.2.

Литература

Содержание лекций будет понятно только после детальной проработки курса квантовой теории поля. На русском языке доступно большое количество прекрасных монографий, как отечественных, так и переводных. Разумно выбрать какую-либо из приведенных ниже книг в качестве основного учебника, используя остальные как справочный материал.

1. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика, третье издание. – М.: Наука, 1969.
2. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика, том IV Теоретической Физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. – М.: Физматлит, 2001.
3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. – М.: Наука, 1980.
4. Бъёркен Дж., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. – т. I, II: Пер. с англ. – М.: Мир, 1978.
5. Вайнберг С. Квантовая теория поля. – т. I,II: Пер. с англ.. – М.: Физматлит, 2003; т. III: Пер. с англ.. – М.: Фазис, 2002.
6. Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля. – Пер. с англ.. – М.: R&C Dynamics, 2001.

Что касается собственно предмета лекций, то в качестве учебника можно рекомендовать книгу

7. Окунь Л.Б. Лептоны и кварки. – М.: Наука, 1990,
а также две последние главы (20 и 21) из монографии Пескина и Шредера.

“Обзор свойств элементарных частиц” (<http://pdg.lbl.gov/>) содержит детальную справочную информацию и обзорные статьи по физике частиц и смежным вопросам.

Детальное рассмотрение вопросов, обсуждаемых в четырнадцатой лекции, содержится, например, в монографии

8. Горбунов Д.С., Рубаков В.А. Введение в теорию ранней Вселенной: теория горячего Большого взрыва. М.: ЛКИ, 2008.