

Стандартная Модель.

*М.И. Высоцкий (ИТЭФ, Москва), А.А. Годизов (ИФВЭ, Протвино),
А.В. Громенко (КГУ, Киев), О.В. Лычковский (ИТЭФ, Москва)*

Лекция 1. Частицы, лагранжиан, эффект Хиггса

Стандартная Модель (СМ) объединяет калибровочные модели электрослабого и сильного взаимодействий, т.е. модель Вайнберга-Салама-Глэшоу и квантовую хромодинамику (КХД), в одну стройную схему $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ и на настоящий момент объясняет все явления в физике высоких энергий. Можно выделить несколько этапов становления Стандартной Модели как общепризнанной теории элементарных частиц. Первый и основной – предложение лагранжиана модели в его минимальном варианте (с безмассовыми нейтрино) со спонтанно нарушенной $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ симметрией и одним электрически нейтральным бозоном Хиггса. Все последующие связаны с постоянными проверками Стандартной Модели как на теоретическом уровне (проверка перенормируемости и отсутствия аномалий), так и на экспериментальном. К последним относятся поиски бозона Хиггса, поиски указаний на существование четвертого поколения фермионов, увеличение числа событий рождения калибровочных бозонов на лептонных ускорителях (на LEP1 было зарегистрировано около 10^7 событий рождения Z-бозона, на ILC это число предполагается увеличить до 10^9). Проводятся постоянные проверки механизма смешивания кварков путем уточнения значений параметров матрицы Кабиббо-Кобаяши-Маскава (СКМ) и проверки ее унитарности. Нарушение унитарности матрицы СКМ служило бы указанием на существование Новой Физики. К сожалению (или к счастью), никаких отклонений пока не замечено, тем не менее было получено много важных экспериментальных результатов. Один из последних – измерение частоты B_s - \bar{B}_s осцилляций. Она также оказалась равна значению, вычисленному по Стандартной Модели. Решающей же проверкой модели, несомненно, станут эксперименты по обнаружению бозона Хиггса (чья масса в минимальном варианте СМ не должна превышать 200 ГэВ) на коллайдере LHC и исследованию каналов его распада. Если бозон Хиггса не будет обнаружен, или его масса окажется заметно больше 200 ГэВ, то это приведет к необходимости подправить тем или иным образом СМ.

Начнем с лагранжиана квантовой электродинамики (лагранжиан Стандартной Модели имеет схожую структуру). Для простоты из всех заряженных полей будем учитывать только электрон-позитронное поле, поскольку слагаемые, соответствующие другим леп-

тонным и кварковым полям, могут быть выписаны автоматически:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{e}(i\hat{\partial} - e\hat{A} - m)e, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.1)$$

где шляпка означает свертку с матрицами Дирака. Распишем электронное поле по киральным компонентам

$$e = \frac{1 + \gamma_5}{2}e + \frac{1 - \gamma_5}{2}e \equiv e_L + e_R, \quad \gamma_5 \equiv -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

В пределе высоких энергий, когда мы можем пренебречь массовым членом в лагранжиане, киральность сохраняется (поскольку взаимодействие с векторным полем сохраняет киральную симметрию лагранжиана). e_L соответствует противоположной направленности импульса и спина электрона, а e_R соответствует случаю совпадения направлений. Лагранжиан (1.1) описывает процессы комптоновского рассеяния, двухфотонной и трехфотонной аннигиляции электрона и позитрона и многие другие процессы.

Между электроном и позитроном существует кулоновское притяжение, и в результате этого притяжения формируется связанное состояние – позитроний. Различают ортопозитроний, когда спины электрона и позитрона параллельны, и парапозитроний, когда они антипараллельны. Поэтому у ортопозитрония в основном состоянии (с нулевым орбитальным моментом $l = 0$) спин $s = 1$, а у парапозитрония $s = 0$. Зарядовая четность ортопозитрония в основном состоянии равна $(-1)^{l+s} = -1$, а парапозитрония $+1$. Следовательно, если парапозитроний в основном состоянии может аннигилировать в два фотона, то ортопозитроний только в три (поскольку зарядовая четность фотона отрицательна). Таким образом, из-за малости константы связи ортопозитроний в основном состоянии живет на три порядка дольше парапозитрония. Аналогичный пример существует и в Стандартной Модели. В 1974 году была открыта долгоживущая векторная частица – J/ψ -мезон. При массе $m_{J/\psi} \approx 3$ ГэВ её ширина меньше 100 кэВ. Впоследствии было выяснено, что J/ψ -мезон – это связанное состояние c и \bar{c} кварков. Они связываются между собой глюонами наподобие того, как связываются фотонами электрон и позитрон в позитронии. Поэтому зарядовая четность J/ψ -мезона также равна -1 , как и у ортопозитрония в основном состоянии. Он распадается по каналу сильного взаимодействия, и, поскольку он не может аннигилировать в два глюона (зарядовая четность системы двух глюонов в бесцветном состоянии $+1$) и распасться на два D -мезона (масса двух D -мезонов больше массы J/ψ), он аннигилирует в три глюона. На таких масштабах эффективная константа взаимодействия КХД уже достаточно мала для того, чтобы ширина J/ψ была меньше ширины “парахармония” η_c (хромодинамический аналог пара-позитрония) на два порядка.

Выпишем теперь последовательно все три поколения фермионов Стандартной Модели:

$$\left(\begin{array}{c} u_L \\ d_L \end{array} \right)^i, \quad u_R^i, d_R^i; \quad \left(\begin{array}{c} c_L \\ s_L \end{array} \right)^i, \quad c_R^i, s_R^i; \quad \left(\begin{array}{c} t_L \\ b_L \end{array} \right)^i, \quad t_R^i, b_R^i;$$

$$\begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix}, e_R; \quad \begin{pmatrix} \nu_L^\mu \\ \mu_L \end{pmatrix}, \mu_R; \quad \begin{pmatrix} \nu_L^\tau \\ \tau_L \end{pmatrix}, \tau_R.$$

Здесь $i = 1, 2, 3$ – цветовой индекс кварков. Все эти фермионы уже открыты. Помимо этого в модели присутствуют дублет скалярных комплексных полей и калибровочные бозоны

$$\begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}, B_\mu, W_\mu^i (i = 1, 2, 3), G_\mu^a (a = 1, \dots, 8).$$

У каждого поколения фермионов взаимодействия с калибровочными $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ полями строятся совершенно одинаково (для кварков добавляется еще и взаимодействие с $SU(3)_c$ калибровочным полем). Различие между поколениями присутствует только в массах, которые возникают из юкавского взаимодействия кварков и лептонов с хиггсовским бозоном. Иначе говоря, перестановочная симметрия между поколениями нарушается взаимодействием фермионов с полем Хиггса.

А сейчас сделаем отступление и обсудим модификацию Стандартной Модели, связанную с введением массы нейтрино. Каким образом это можно сделать? Первый и самый тривиальный вариант – это придание нейтрино обычной дираковской массы тем же путем, как это делается для всех остальных фермионов, т.е. добавлением соответствующих правых полей ν_R и членов взаимодействия с бозоном Хиггса. В результате мы получим вторую матрицу смешивания поколений (теперь уже лептонов), и лептонный сектор будет аналогичен кварковому. Массы нейтрино каждого поколения не должны превышать 1 эВ. Эта оценка получена следующим путем. Из экспериментов с распадом трития была получена верхняя граница массы электронного нейтрино: $m_\nu < 1$ эВ. Из осцилляций солнечных нейтрино можно выделить разность квадратов масс первого и второго, а из атмосферных осцилляций – разность квадратов масс второго и третьего нейтрино. Обе эти разности по абсолютной величине оказываются гораздо меньше 1 эВ², из чего и следует приведенная выше оценка. Отметим, что согласно космологическим аргументам нейтрино должны быть еще легче: сумма масс всех трех нейтрино не должна превышать 0.1 эВ.

Второй и самый популярный сценарий – это введение майорановской массы у нейтрино через механизм see-saw (в отличие от заряженных фермионов нейтрино может быть майорановским спинором). Проиллюстрируем этот механизм на примере одного поколения нейтрино. Если в Стандартную Модель добавляется ν_R , то требованиям калибровочной инвариантности и перенормируемости удовлетворяет член в лагранжиане $M\bar{\nu}_R\nu_R^c$, где "с" означает зарядово-сопряженный спинор (добавление такого слагаемого означает, что теперь у нас два майорановских нейтрино вместо одного дираковского). Это слагаемое нарушает лептонный заряд на две единицы. Поскольку лептонный заряд нейтрино не связан с электрическим, никакой катастрофы в этом нет. Мы можем положить массу M сколь угодно большой. Если мы начнем диагонализировать массовую матрицу, состоящую из

дираковского члена $m_D \bar{\nu}_R \nu_L$ и майорановской массы правого нейтрино и искать ее собственные значения и состояния, то получим, что в каждом поколении наряду с тяжелым нейтрино массы порядка M (и состоящем, в основном, из ν_R) будет присутствовать легкое нейтрино с массой m_D^2/M (состоящее, в основном, из ν_L). Величина m_D – порядка массы заряженных дираковских фермионов. Таким образом, механизм see-saw естественным образом позволяет объяснить малость массы ν_L . Подтверждением того факта, что нейтрино является майорановским, а не дираковским спинором, могло бы стать наблюдение процессов с нарушением лептонного числа, например двойного безнейтринного бета-распада ($2\beta 0\nu$). В этой реакции электронное антинейтрино, испущенное при распаде одного нейтрона может (поскольку оно одновременно является и нейтрино) в столкновении с другим нейтроном дать протон и электрон, т.е. происходит переход двух нейтронов в систему двух протонов и двух электронов (с нарушением лептонного числа на две единицы). При этом в спектре суммарной энергии двух электронов мы получим дельта-образную особенность. Такие события пока не зарегистрированы. Их поиск является одним из приоритетных направлений в современном эксперименте, поскольку именно он должен дать ответ, является ли нейтрино майорановским или дираковским спинором, что важно для окончательной фиксации СМ.

Третий способ введения массы нейтрино (без введения ν_R) заключается в добавлении в лагранжиан членов вида

$$\frac{1}{M} (\bar{\nu}_L^e \quad \bar{e}_L)^c \epsilon \vec{\sigma} \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix} H \epsilon \vec{\sigma} H,$$

где $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули, ϵ – антисимметричная единичная матрица 2×2 , H – дублет полей Хиггса. Слагаемые такого вида делают нашу модель перенормируемой, хотя если масштаб M выбрать порядка величины массы Планка, то их источником может быть квантовая гравитация, не являющаяся перенормируемой теорией. Перенормируемая теория Великого Объединения также может приводить к таким операторам при низких энергиях. Эффект таких операторов невелик, и масса ν_L оказывается очень малой. Обнаружение $2\beta 0\nu$ распадов не позволит сделать выбор между вторым и третьим механизмами генерации массы нейтрино.

Вернемся к построению лагранжиана Стандартной Модели. Обозначим через L_k и r_k , соответственно, лептонные дублет и синглет k -ого поколения, через Q_k^m и q_k^m – аналогичные кварковые структуры цвета m (при этом надо помнить, что кварковых синглетов 6 (число ароматов) \times 3 (число цветов), а не 3, как заряженных лептонов), тогда “кинетическая” часть лагранжиана будет иметь вид (по повторяющимся индексам проводится суммирование)

$$\mathcal{L}_{massless} = i \bar{L}_k [\hat{\partial} - ig_1 \frac{Y_L^l}{2} \hat{B} - ig_2 \frac{\sigma^i}{2} \hat{W}^i] L_k + i \bar{r}_k [\hat{\partial} - ig_1 \frac{Y_R^l}{2} \hat{B}] r_k +$$

$$\begin{aligned}
& +i\bar{Q}_k^m[\delta_{mn}\hat{\partial} - ig_1\frac{Y_L^Q}{2}\hat{B}\delta_{mn} - ig_2\frac{\sigma^i}{2}\hat{W}^i\delta_{mn} - ig_3\frac{\lambda_{mn}^a}{2}\hat{G}^a]Q_k^n + \\
& +i\bar{q}_k^m[\delta_{mn}\hat{\partial} - ig_1\frac{Y_R^q}{2}\hat{B}\delta_{mn} - ig_3\frac{\lambda_{mn}^a}{2}\hat{G}^a]q_k^n - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^iW_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^aG_a^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g_2\epsilon^{ijk}W_\mu^jW_\nu^k \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_3f^{abc}G_\mu^bG_\nu^c \quad (a, b, c = 1, \dots, 8)$$

здесь σ^i – матрицы Паули, λ^a – матрицы Гелл-Манна, ϵ^{ijk} , f^{abc} – структурные константы групп $SU(2)$ и $SU(3)$, соответственно, т.е. $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k$, $[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c$. Заметим, что абелев заряд может различаться для различных полей (в отличие от неабелева, фиксированного нелинейностью коммутационных соотношений). Эта возможность отражена введением гиперзарядов Y , разных для различных киральных компонент. Итак, мы записали минимальный $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ калибровочно инвариантный лагранжиан с безмассовыми фермионами и калибровочными бозонами.

Хотя (1.2) обладает локальной $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ симметрией, что формально обеспечивает перенормируемость теории, в фермионном секторе возникает проблема. Из-за того, что в рядах теории возмущений присутствуют треугольные диаграммы, у которых все три внутренние линии фермионные, а из наружных две векторные, а одна аксиально-векторная, возникает так называемая аксиальная аномалия.

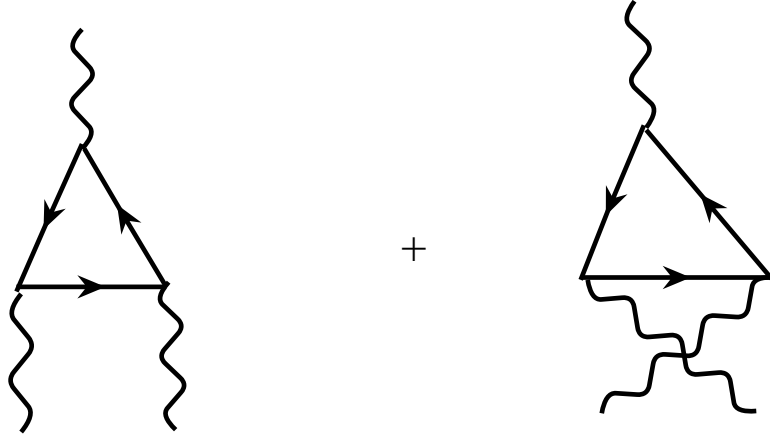


Рис. 1: Аномальные треугольники

Аномалией называют нарушение некоторого закона сохранения, вытекающего из свойств симметрии лагранжиана классической теории, квантовыми поправками, вычисленными на основе того же лагранжиана. При этом характерным признаком аномалий является невозможность их устранения путем переопределения каких-либо величин или параметров. К электрослабой теории аксиальная аномалия имеет непосредственное отношение.

Поскольку лево-киральные и право-киральные компоненты спиноров по-разному входят в исходный лагранжиан, векторные бозоны взаимодействуют как с векторными, так и с аксиальными токами. Если эти токи перестанут сохраняться при учете петлевых диаграмм, то обеспечивающая перенормируемость теории слабых взаимодействий локальная $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ симметрия окажется разрушенной. В случае Стандартной Модели существующая симметрия между поколениями фермионов (число поколений лептонов равно числу поколений кварков) позволяет сократить аномальные диаграммы и теория остается перенормируемой. Принципиальная возможность компенсации реализуется при определенных соотношениях между зарядами кварков и лептонов. Выведем эти соотношения.

Сразу отметим, что треугольник с участием только одного векторного бозона из триплета W^i зануляется (след матриц Паули равен нулю). При суммирование двух диаграмм, дающих вклад в треугольник с тремя бозонами из триплета W^i выделяется множитель $Sp[\sigma^i \sigma^j \sigma^k + \sigma^i \sigma^k \sigma^j] = 0$, поэтому вклад такого треугольника также равен нулю (специфическое свойство генераторов группы $SU(2)$). Вклад фермионов в треугольник с участием двух бозонов из триплета W^i и одного поля B (сюда дают вклад только лево-киральные компоненты фермионов), очевидно, пропорционален их гиперзаряду. Поэтому, учитывая цвет кварков и тот факт, что гиперзаряды фермионов из одного дублета равны, приходим к соотношениям:

$$Y_{\nu_L} = Y_{e_L}, \quad Y_{d_L} = Y_{u_L}, \quad Y_{e_L} + 3Y_{u_L} = 0. \quad (1.3)$$

При рассмотрении треугольника с тремя B -бозонами заметим, что вклады лево- и право-киральных компонент фермионов в дивергенцию аксиального тока противоположны. Поэтому условием отсутствия аномалий является равенство

$$\Sigma Y_L^3 = \Sigma Y_R^3.$$

Гиперзаряды левой и правой компоненты массивной частицы связаны с гиперзарядом поля Хиггса, так как соответствующие члены взаимодействия фермионов с хиггсовским дублетом $U(1)$ -инвариантны. Гиперзаряд хиггсовского дублета примем равным $+1$ (этого всегда можно добиться переопределением константы g_1). Отсюда мы имеем соотношения $Y_{e_R} = Y_{e_L} - 1$, $Y_{u_R} = Y_{u_L} + 1$, $Y_{d_R} = Y_{d_L} - 1 = Y_{u_L} - 1$ (эти равенства будут обоснованы ниже при рассмотрении хиггсовского механизма генерации масс фермионов). Учитывая, что в изодублетах имеется два партнера и кварки бывают трех цветов, получим

$$2Y_{e_L}^3 + 2 \cdot 3Y_{u_L}^3 - (Y_{e_L} - 1)^3 - 3(Y_{u_L} + 1)^3 - 3(Y_{u_L} - 1)^3 = 0.$$

Выражая с помощью (1.3) Y_{u_L} через Y_{e_L} , окончательно придем к

$$(Y_{e_L} + 1)^3 = 0. \quad (1.4)$$

Отсюда получаем

$$Y_{e_L} = Y_{\nu_L} = -1, \quad Y_{u_L} = Y_{d_L} = \frac{1}{3}, \quad Y_{e_R} = -2, \quad Y_{u_R} = \frac{4}{3}, \quad Y_{d_R} = -\frac{2}{3}. \quad (1.5)$$

Ниже, после вывода соотношения связи электрического заряда с изоспином и гиперзарядом, мы сможем получить значения электрических зарядов всех фермионов с помощью (1.5).

При добавлении в теорию правого нейтрино его майорановская масса накладывает требование $Y_{\nu_R} = 0$, т.е. соответствующее слагаемое выпадает из всех уравнений. Однако если правое нейтрино не имеет майорановской массы, то уравнение (1.4) выполняется автоматически, и мы теряем объяснение нейтральности нейтрино и нейтрона в стандартной модели.

Устранив треугольные аномалии покажем как в явной форме выделить из (1.2) члены, отвечающие за электромагнитное и слабое взаимодействия. Для этого распишем по киральным компонентам члены, ответственные за взаимодействия лептонов первого поколения с калибровочными бозонами

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_L^e \left(\frac{g_1 Y_L^l}{2} \hat{B} + \frac{g_2}{2} \hat{W}^3 \right) \nu_L^e + \bar{e}_L \left(\frac{g_1 Y_L^l}{2} \hat{B} - \frac{g_2}{2} \hat{W}^3 \right) e_L + \bar{e}_R \left(\frac{g_1 Y_R^l}{2} \hat{B} \right) e_R + \\ + \frac{g_2}{2} \bar{\nu}_L^e (\hat{W}^1 - i\hat{W}^2) e_L + \frac{g_2}{2} \bar{e}_L (\hat{W}^1 + i\hat{W}^2) \nu_L^e. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Введем обозначения для линейных комбинаций калибровочных полей

$$\begin{aligned} A_\mu \equiv \frac{g_2 B_\mu - g_1 Y_L^l W_\mu^3}{\sqrt{g_1^2 Y_L^{l^2} + g_2^2}}, \quad Z_\mu \equiv \frac{g_1 Y_L^l B_\mu + g_2 W_\mu^3}{\sqrt{g_1^2 Y_L^{l^2} + g_2^2}}, \\ W_\mu^+ \equiv \frac{W_\mu^1 - iW_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad W_\mu^- \equiv \frac{W_\mu^1 + iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

и перепишем (1.6) в новой форме

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{g_1^2 Y_L^{l^2} + g_2^2}}{2} \bar{\nu}_L^e \hat{Z} \nu_L^e + \frac{g_1 g_2 Y_L^l}{\sqrt{g_1^2 Y_L^{l^2} + g_2^2}} \bar{e}_L \hat{A} e_L + \frac{g_1^2 Y_L^{l^2} - g_2^2}{2\sqrt{g_1^2 Y_L^{l^2} + g_2^2}} \bar{e}_L \hat{Z} e_L + \\ + \frac{g_1 g_2 Y_R^l}{2\sqrt{g_1^2 Y_L^{l^2} + g_2^2}} \bar{e}_R \hat{A} e_R + \frac{g_1^2 Y_L^l Y_R^l}{2\sqrt{g_1^2 Y_L^{l^2} + g_2^2}} \bar{e}_R \hat{Z} e_R + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L^e \hat{W}^+ e_L + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \hat{W}^- \nu_L^e. \end{aligned}$$

Поскольку право- и лево-киральные компоненты электронного поля должны взаимодействовать с электромагнитным полем A_μ одинаковым образом, мы приходим к соотношению $Y_R^l = 2Y_L^l$. Так как $Y_L^l = -1$, получим выражение для электромагнитной константы связи $e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$, а вводя угол смешивания Вайнберга $\theta \equiv \arctg \frac{g_1}{g_2}$, сможем выразить

исходные константы g_1 и g_2 и калибровочные поля B_μ и W_μ^3 через e , θ и физические поля A_μ , Z_μ

$$g_1 = \frac{e}{\cos \theta}, \quad g_2 = \frac{e}{\sin \theta} \quad \left(\sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \frac{e}{\sin \theta \cos \theta} \equiv \bar{g} \right),$$

$$B_\mu = A_\mu \cos \theta - Z_\mu \sin \theta, \quad W_\mu^3 = A_\mu \sin \theta + Z_\mu \cos \theta$$

и представить (1.6) в виде

$$\frac{e}{2 \sin \theta \cos \theta} \bar{\nu}_L^e \hat{Z} \nu_L^e - e \bar{e}_L \hat{A} e_L - \frac{e}{2} (\text{ctg } \theta - \text{tg } \theta) \bar{e}_L \hat{Z} e_L -$$

$$- e \bar{e}_R \hat{A} e_R + e \text{tg } \theta \bar{e}_R \hat{Z} e_R + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta} \bar{\nu}_L^e \hat{W}^+ e_L + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta} \bar{e}_L \hat{W}^- \nu_L^e.$$

Отметим теперь, что поскольку электромагнитное поле выражается через исходные калибровочные поля как $A_\mu = (g_2 B_\mu + g_1 W_\mu^3) / \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$, а ковариантная производная имеет вид $\partial_\mu - ig_1 \frac{Y_L^I}{2} B_\mu - ig_2 \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^i$, то электрический заряд (в единицах заряда позитрона) фермиона Q связан с его изоспином T_3 (собственным значением матрицы $\sigma_3/2$) и гиперзарядом Y соотношением

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}.$$

Далее, рассматривая ту часть исходного лагранжиана взаимодействия, которая ответственна за взаимодействие кварков первого поколения с $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ калибровочными бозонами и получив из требования отсутствия треугольных аномалий значения гиперзарядов кварковых полей $Y_L^Q = \frac{1}{3}$, $Y_R^u = \frac{4}{3}$, $Y_R^d = -\frac{2}{3}$, после аналогичных выкладок сможем полностью записать лагранжиан взаимодействия фермионов первого поколения с $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ калибровочными бозонами (для других поколений картина идентична)

$$\mathcal{L}_{int}^I = -e \bar{e}_L \hat{A} e_L - e \bar{e}_R \hat{A} e_R +$$

$$+ \frac{e}{2 \sin \theta \cos \theta} \bar{\nu}_L^e \hat{Z} \nu_L^e - \frac{e}{2} (\text{ctg } \theta - \text{tg } \theta) \bar{e}_L \hat{Z} e_L + e \text{tg } \theta \bar{e}_R \hat{Z} e_R +$$

$$+ \frac{2e}{3} \bar{u}_L \hat{A} u_L + \frac{2e}{3} \bar{u}_R \hat{A} u_R - \frac{e}{3} \bar{d}_L \hat{A} d_L - \frac{e}{3} \bar{d}_R \hat{A} d_R + \quad (1.7)$$

$$+ \frac{e}{6} (3 \text{ctg } \theta - \text{tg } \theta) \bar{u}_L \hat{Z} u_L - \frac{e}{6} (3 \text{ctg } \theta + \text{tg } \theta) \bar{d}_L \hat{Z} d_L - \frac{2e}{3} \text{tg } \theta \bar{u}_R \hat{Z} u_R + \frac{e}{3} \text{tg } \theta \bar{d}_R \hat{Z} d_R +$$

$$+ \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta} \bar{\nu}_L^e \hat{W}^+ e_L + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta} \bar{e}_L \hat{W}^- \nu_L^e + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta} \bar{u}_L \hat{W}^+ d_L + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta} \bar{d}_L \hat{W}^- u_L.$$

Отметим, что роль, аналогичную константе e и генератору Q для взаимодействия фотона с материей в случае Z -бозона играет заряд \bar{g} и генератор $T_3 - Q \sin^2 \theta$. Это замечание позволяет легко выписывать выражения для вершин испускания Z -бозона полями материи, не запоминая соответствующих членов в приведенной выше формуле.

Перейдем к введению массы калибровочных бозонов в Стандартной Модели. Сразу отметим, что простое введение массовых членов для векторных полей приведет к нарушению калибровочной инвариантности (то же самое можно сказать и о фермионных полях,

поскольку в массовых членах смешиваются компоненты $SU(2)_L$ синглетов и $SU(2)_L$ дублетов $m_\psi \bar{\psi} \psi = m_\psi \bar{\psi}_L \psi_R + m_\psi \bar{\psi}_R \psi_L$, отсюда и нарушение $SU(2)_L$ симметрии исходного лагранжиана), что делает нашу модель перенормируемой. Вообще говоря, связь перенормируемости с калибровочной инвариантностью является весьма нетривиальным фактом. Действительно, свойство перенормируемости напрямую связано с поведением пропагаторов полей при высоких энергиях, когда, казалось бы, можно пренебречь их массой. Если бы это было так, то прямое введение в лагранжиан масс векторных полей, нарушающее калибровочную инвариантность, не портило бы перенормируемость теории. Ниже мы продемонстрируем, что для моделей с участием неабелевых векторных полей не существует гладкого перехода к пределу нулевой массы. В первую очередь это связано с разницей в числе спиновых степеней свободы: 2 – для безмассового векторного поля и 3 – для массивного, в отличие от случая полей с меньшими спинами.

Функция Грина дифференциального оператора Прока имеет вид

$$G_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}}{k^2 - M^2}. \quad (1.8)$$

Наличие второго слагаемого в числителе (1.8) приводит к тому, что пропагатор поля не ведет себя $\sim \frac{1}{k^2}$ при $k^2 \rightarrow \infty$ и расчеты петлевых поправок к амплитудам в древесном приближении моментально выявят перенормируемость теории. Здесь следует особо отметить случай взаимодействия массивного векторного поля с сохраняющимся током. При этом нежелательное слагаемое в числителе пропагатора всегда можно проигнорировать и модель будет такой же перенормируемой, как если бы соответствующий бозон был безмассовым. Именно поэтому нельзя гарантировать, что масса фотона точно равна нулю. Она может быть любой сколь угодно малой величиной, не нарушая перенормируемость квантовой электродинамики. Но в случае слабых взаимодействий, когда присутствуют несохраняющиеся векторные и аксиальные токи $i\partial_\mu \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 = (m_2 - m_1) \bar{\psi}_1 \psi_2$, $i\partial_\mu \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \psi_2 = -(m_2 + m_1) \bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2$ (т.е. векторные токи не сохраняются при неравенстве масс фермионных полей, входящих в оператор тока, аксиальные – при наличии массы у любого из фермионов), мы приходим к перенормируемой модели.

Рассмотрим поляризацию массивной векторной частицы W^μ , движущейся вдоль оси z . Из уравнений Прока непосредственно следует условие Лоренца $k_\mu W^\mu = 0$, оно же выполняется и для нормированного на единицу вектора поляризации $k_\mu e^\mu = 0$. Последнее уравнение имеет три линейно независимых решения $e_\mu^{(1)} = (0, 1, 0, 0)$, $e_\mu^{(2)} = (0, 0, 1, 0)$, $e_\mu^{(3)} = \left(\frac{|\vec{k}|}{M}, 0, 0, \frac{E}{M}\right) = \frac{k_\mu}{M} + \frac{M}{E+|\vec{k}|}(-1, 0, 0, 1)$. Первые два вектора такие же, как и у безмассового фотона. В третьем же векторе присутствуют сингулярные при $|\vec{k}| \rightarrow \infty$ слагаемые. Поэтому единственная возможность для модели остаться перенормируемой после введения массы у векторного поля заключена в отсутствии непоперечных (несохраняющихся) токов. Тогда третья (продольная) компонента векторного поля не будет аномально сильно

взаимодействовать с другими физическими полями, и при высоких энергиях мы не увидим кардинального отличия от безмассового случая.

Для получения перенормируемой теории с массивными калибровочными бозонами надо обратиться к механизму Хиггса. Для начала рассмотрим квантовую электродинамику самодействующего скалярного поля:

$$\mathcal{L} = |(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi|^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left[\phi^+\phi - \frac{\eta^2}{2} \right]^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (1.9)$$

Отметим, что с самого начала в (1.9) присутствует член $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$, фиксирующий калибровку. При этом пропагатор фотона имеет вид:

$$G_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu} - (1 - \xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2}.$$

Если $\eta^2 < 0$, то мы приходим к перенормируемой электродинамике самодействующего массивного скалярного поля. Поскольку токи в рассматриваемой модели сохраняются, то все амплитуды не зависят от второго члена в числителе пропагатора, а значит и от ξ . Случай $\xi = 1$ – это калибровка Фейнмана, $\xi = 0$ – калибровка Ландау. При $\xi \rightarrow \infty$ лагранжиан восстанавливает калибровочно инвариантную форму. Такая калибровка называется унитарной.

При $\eta^2 > 0$ вакуумным значением поля ϕ будет уже не 0, а $\frac{\eta}{\sqrt{2}}$ с точностью до комплексной фазы. Выберем эту фазу равной нулю и разложим поле ϕ в окрестности вакуумного значения

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \rho(x) + i\varphi(x)).$$

Если мы совершим калибровочное преобразование

$$\varphi(x) = \varphi'(x) + \eta\Lambda(x), \quad A_\mu(x) = A'_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x), \quad (1.10)$$

где $\Lambda(x) = \varphi(x)/\eta$, то придем к калибровке, в которой новое поле $\varphi'(x)$ тождественно равно нулю, а новое векторное поле $A'_\mu(x)$ приобретает продольную компоненту

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e\eta}\partial_\mu\varphi(x),$$

(голдстоуновский бозон $\varphi(x)$ как бы “поглотился” векторным бозоном). Посмотрим, как отличие от нуля вакуумного среднего поля ϕ модифицирует пропагатор фотона, изначально записанный в калибровке Ландау. Для этого выпишем квадратичную по полям $\varphi(x)$ и $A_\mu(x)$ часть лагранжиана (1.9):

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}e^2\eta^2 A_\mu^2 - e\eta A_\mu\partial^\mu\varphi. \quad (1.11)$$



Рис. 2: Поляризационный оператор фотона

В низшем порядке теории возмущений поляризационный оператор фотона описывается изображенными на рисунке диаграммами.

Подставляя поляризационный оператор

$$i\Pi_{\rho\sigma} = (-ie\eta)^2 k_\rho k_\sigma \frac{i}{k^2} + \frac{1}{2} 2e^2 \eta^2 i g_{\rho\sigma} = ie^2 \eta^2 (g_{\rho\sigma} - \frac{k_\rho k_\sigma}{k^2})$$

в выражение для “одетого” пропагатора фотона

$$-iG_{\mu\nu} = -iG_{\mu\nu}^0 + (-iG_{\mu\rho}^0)(i\Pi^{\rho\sigma})(-iG_{\sigma\nu}^0) + \dots$$

приходим к

$$G_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2 - e^2 \eta^2}.$$

Если мы рассмотрим теперь пропагатор скалярного поля, то увидим, что, так как мы работаем в калибровке Ландау с поперечным “голым” пропагатором фотона, а в вершинах взаимодействия скалярного и векторного полей присутствует k_μ , то радиационные поправки к пропагатору скалярного поля обнуляются и он по-прежнему имеет вид $G = -1/k^2$. Оба пропагатора падают при $k^2 \rightarrow \infty$ как $1/k^2$, поэтому мы получаем перенормируемую теорию массивной векторной частицы.

Поскольку роль продольной компоненты векторного поля играет скалярное поле φ , то при анализе поведения амплитуд рассеяния при высоких энергиях достаточно посмотреть, как они ведут себя при замене массивного векторного поля на скалярное в голдстоуновской фазе. В этом заключается так называемая теорема эквивалентности. Проиллюстрируем ее на примере задачи о распаде t -кварка в Стандартной Модели.

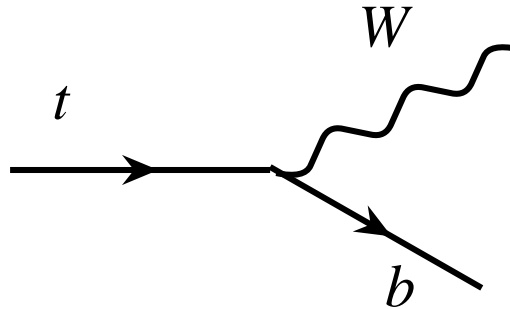


Рис. 3: Распад t -кварка

При этом массу t -кварка будем считать много больше массы W -бозона, участвующего в распаде (на самом деле, $M_W^2 \simeq 0.2 m_t^2$, но сейчас нас интересует теоретический аспект проблемы, а не численный). Выражение для квадрата модуля амплитуды распада t -кварка на W^+ -бозон и b -кварк имеет вид

$$|T|^2 = \frac{g_2^2}{2} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2} \right) \frac{1}{2} Sp \left[(\hat{p}_b + m_b) \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} (\hat{p}_t + m_t) \gamma^\nu \frac{1 + \gamma_5}{2} \right].$$

После несложных расчетов в приближении $m_t^2 \gg M_W^2 \gg m_b^2$ приходим к

$$|T|^2 \simeq \frac{g_2^2}{4} \frac{m_t^4}{M_W^2}.$$

Если же мы теперь вспомним член в лагранжиане, описывающий генерацию массы t -кварка за счет механизма Хиггса

$$\frac{m_t}{\eta/\sqrt{2}} (\bar{t}_L \quad \bar{b}_L) t_R \begin{pmatrix} H^{0*} \\ H^- \end{pmatrix},$$

и запишем амплитуду распада t_R на b_L и безмассовый заряженный голдстоуновский бозон H^{-*} , то получим

$$|T|^2 = \frac{2m_t^2}{\eta^2} \frac{1}{2} Sp \left[(\hat{p}_b + m_b) \frac{1 - \gamma_5}{2} (\hat{p}_t + m_t) \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] \simeq \frac{m_t^4}{\eta^2} = \frac{g_2^2 m_t^4}{4M_W^2}.$$

Выражения для квадратов амплитуд в обоих случаях совпадают.

Время жизни t -кварка, масса которого близка к 170 ГэВ,

$$\tau_t = \left(\frac{G_F m_t^3}{8\sqrt{2}} \right)^{-1} \approx (5 \text{ ГэВ})^{-1}$$

настолько мало, что бесцветные адроны, в состав которых он мог бы входить, не успевают образовываться.

Прежде чем перейти к последовательному описанию механизма Хиггса в Стандартной Модели, найдем пропагатор фотона в произвольной калибровке (при произвольном значении ξ). Последний член в (1.11) приводит к смешиванию полей A_μ и ϕ . Нам надо так подобрать функцию $\Lambda(x)$ преобразования (1.10), чтобы в новых переменных $\varphi'(x)$, $A'_\mu(x)$ лагранжиан стал диагональным. Удобство преобразования (1.10) в том, что сумма всех членов в (1.11), за исключением члена, фиксирующего калибровку, инвариантна относительно него. С учетом последнего обстоятельства и опуская штрихи у полей A'_μ, φ' , получим

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} e^2 \eta^2 A_\mu^2 - \underline{e\eta A_\mu \partial^\mu \varphi} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\xi e^2} (\partial_\nu \partial^\nu \Lambda)^2 - \underline{\frac{1}{\xi e} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu \partial^\nu \Lambda}.$$

Выбирая $\partial_\nu \partial^\nu \Lambda = \xi e^2 \eta \varphi$ и добавляя к лагранжиану полную 4-дивергенцию $e \eta \partial_\mu (A^\mu \varphi)$, приходим к

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} e^2 \eta^2 A_\mu^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} \xi e^2 \eta^2 \varphi^2.$$

При этом для пропагаторов полей A_μ и φ имеем

$$G_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - M^2 \xi}}{k^2 - M^2} = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}}{k^2 - M^2} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2 (k^2 - \xi M^2)}, \quad G = \frac{1}{k^2 - \xi M^2}, \quad (1.12)$$

где $M = e\eta$. Полученные пропагаторы в литературе называются "пропагаторами в перенормируемых R_ξ -калибровках т'Хофта". Это название связано с видоизменением фиксирующего калибровку члена, предложенным т'Хофтом,

$$\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \rightarrow \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu + e\eta \xi \varphi)^2.$$

Мы видим, что при любом конечном ξ пропагаторы (1.12) падают, как $1/k^2$, т.е. дают перенормируемую теорию. Полюса при $k^2 = \xi M^2$ в пропагаторах векторного и скалярного полей фиктивные – они сокращаются в амплитудах физических процессов (в матричных элементах S -матрицы).

При $\xi \rightarrow \infty$ (унитарная калибровка) скаляр становится бесконечно тяжелым, и "отщепляется" (дает нулевой вклад), остается массивная векторная частица, описываемая пропагатором Прока. При $\xi = 0$ мы получаем калибровку т'Хофта-Ландау. При $\xi = 1$ – калибровка т'Хофта-Фейнмана, удобная для петлевых расчетов. Ключевой является калибровочная инвариантность теории – она дает возможность, проводя вычисления в перенормируемой калибровке, получать амплитуды для физической массивной векторной частицы (унитарная калибровка).

Теперь рассмотрим спонтанное нарушение симметрии в случае неабелевой $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ калибровочной теории. К лагранжиану взаимодействующих безмассовых фермионов и калибровочных бозонов добавим минимальный хиггсовский сектор

$$\mathcal{L}_H = \left| \left(\partial_\mu - i g_1 B_\mu \frac{1}{2} - i g_2 \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^i \right) H \right|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left[H^+ H - \frac{\eta^2}{2} \right]^2. \quad (1.13)$$

Дублет комплексных скалярных полей Хиггса мы всегда можем представить в форме

$$H = e^{i \frac{\sigma^i}{2} H^i(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta + \rho(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Обращая калибровочным преобразованием голдстоуновские поля $H^1(x)$, $H^2(x)$, $H^3(x)$ в ноль и расписывая (1.13), имеем

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho)^2 + \frac{(\eta + \rho)^2}{2} \left[\frac{1}{4} (g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3)^2 + \frac{g_2^2}{2} W_\mu^+ W_\mu^- \right] - \frac{\lambda^2 \rho^2}{2} \left(\eta + \frac{\rho}{2} \right)^2.$$

И, окончательно,

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{(\eta + \rho)^2}{2} \left[\frac{g_1^2 + g_2^2}{4} Z_\mu^2 + \frac{g_2^2}{2} W_\mu^+ W_\mu^- \right] - \frac{\lambda^2 \rho^2}{2} \left(\eta + \frac{\rho}{2} \right)^2. \quad (1.14)$$

Итак мы видим, что из дублета комплексных скалярных полей осталось только действительное массивное поле Хиггса ρ , $M_\rho = \lambda\eta$, а три голдстоуновских бозона "поглотились" тремя векторными бозонами, дав им массу, причем $M_W = g_2\eta/2$ и $M_W/M_Z = \cos\theta$. Таким образом, четыре исходные фундаментальные константы g_1, g_2, η, λ могут быть выражены через четыре физические постоянные – электрический заряд e и массы бозонов M_W, M_Z, M_H .

Лекция 2. Радиационные поправки в электрослабой модели: схема вычисления; лидирующие поправки к массе W -бозона.

Материал этой лекции имеет технический характер, и при первом чтении детали вычислений могут быть пропущены.

Приведем измеренные на эксперименте значения некоторых наблюдаемых величин (в скобках указывается величина относительной погрешности измерения): масса Z -бозона $M_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$ ($2 \cdot 10^{-5}$), его ширина $\Gamma_Z = 2.4952 \pm 0.0023 \text{ GeV}$ (10^{-3}), постоянная тонкой структуры $\alpha = 1/(137.03599911 \pm 0.00000046)$ ($5 \cdot 10^{-9}$), постоянная Ферми $G_F = (1.16637 \pm 0.00001) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ (10^{-5}), масса W -бозона $M_W = 80.403 \pm 0.029 \text{ GeV}$ ($5 \cdot 10^{-4}$). Поскольку $\alpha/(\pi \sin^2 \theta) \approx 10^{-2}$, то очевидно, что для анализа экспериментальных данных необходим учет (по крайней мере, однопетлевых) радиационных поправок к этим величинам.

В отличие от квантовой электродинамики (КЭД), когда нам с очень высокой точностью известны экспериментальные значения заряда и массы электрона (параметров лагранжиана), заряды Стандартной Модели g_1 и g_2 непосредственно на опыте не измеряются, а массы калибровочных бозонов не являются параметрами исходного лагранжиана. Поэтому более эффективным является следующий путь. Выразив три величины, известные с наилучшей точностью: постоянную тонкой структуры, постоянную Ферми и массу Z -бозона через затравочные параметры g_{10}, g_{20}, η_0 лагранжиана с учетом радиационных поправок, вносящих зависимость от параметров схемы регуляризации (в нашем случае размерной регуляризации) и обратив соответствующие алгебраические уравнения, получить выражения

затравочных параметров теории через измеренные на опыте с наилучшей точностью величины и параметры регуляризационной схемы. Подставляя затем полученные выражения в соотношения для физических величин, записанные с учетом радиационных поправок, получим (благодаря перенормируемости теории) конечные выражения для интересующих нас величин через α , G_F и M_Z , в которых уже учтены радиационные поправки.

Вначале рассмотрим случай чистой КЭД с одним заряженным спинорным полем. Как известно из курса квантовой теории поля, бегущая константа связи КЭД может быть представлена в виде

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_0}{1 - \pi(k^2)} \equiv \frac{\frac{\alpha_0}{1 - \pi(0)}}{1 - (\pi(k^2) - \pi(0)) - \frac{\pi(0)(\pi(k^2) - \pi(0))}{1 - \pi(0)}},$$

где α_0 – затравочная константа связи исходного лагранжиана, а $\pi(k^2)$ – безразмерный коэффициент, стоящий при $g_{\mu\nu}$ в поляризационном операторе фотона и явно зависящий не только от виртуальности фотона, но и от массы фермиона m_f и параметров перенормировочной схемы. В однопетлевом приближении и в пределе высоких энергий $|k^2| \gg m_f^2$ разность $\pi(k^2) - \pi(0)$ оказывается не зависящей от параметров схемы регуляризации и равной

$$\pi(k^2) - \pi(0) = \frac{\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{|k^2|}{m_f^2} - \frac{5}{3} \right) + O(\alpha^2)$$

где $\alpha = \bar{\alpha}(0) = \alpha_0/(1 - \pi(0)) \simeq 1/137$ – постоянная тонкой структуры. При этом бегущая константа связи будет равна (опять же, в однопетлевом приближении и в пределе высоких энергий)

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{|k^2|}{m_f^2} - \frac{5}{3} \right) + O(\alpha^2)}. \quad (2.1)$$

Мы получили знаменитую формулу, описывающую эффективный рост электромагнитного заряда с увеличением импульса.

В случае Стандартной Модели при $k^2 = M_Z^2$ (2.1) модифицируется и принимает вид

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{1 - \delta\alpha_l - \delta\alpha_h},$$

где

$$\delta\alpha_l = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_l \left(\ln \frac{M_Z^2}{m_l^2} - \frac{5}{3} \right) = 0.0314$$

учитывает вклад трех заряженных лептонов, а $\delta\alpha_h$ – вклад адронов в поляризацию электромагнитного поля. Теоретически вычислить $\delta\alpha_h$ не позволяет неумение работать с КХД в области малых энергий. Поэтому для её расчета поступают следующим образом. Записывается дисперсионный интеграл для вклада адронов в $\pi(k^2)$, мнимая часть которого пропорциональна полному сечению e^+e^- -аннигиляции в адроны. Значение сечения при

низких энергиях берется из экспериментальных данных, а при высоких энергиях из партонной модели. В результате было получено

$$\delta\alpha_h = 0.02761(36)$$

и

$$\bar{\alpha}(M_Z) = \frac{1}{128.94 \pm 0.05},$$

где неопределенность обусловлена экспериментальной ошибкой в измерении сечения. Заметим, что в $\delta\alpha_h$ принято учитывать вклад 5 кварковых ароматов (вклады t -кварка и W -бозона численно малы и их относят к собственно электрослабым поправкам). Закончим обсуждение электромагнитной константы формулой для $\bar{\alpha}$ через затравочные параметры электрослабой модели

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{4\pi} g_0^2 \left(1 - \frac{g_0^2}{\bar{g}_0^2} \right) \left[1 - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} - 2 \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} \operatorname{tg} \theta \right],$$

где мы для сокращения записи ввели условные обозначения $g_0 \equiv g_{20}$, $\bar{g}_0 \equiv \sqrt{g_{10}^2 + g_{20}^2}$, $\Pi(k^2) \equiv k^2 \pi(k^2)$. При этом Π_γ и $\Pi_{\gamma Z}$ соответствуют двум радиационным поправкам к электромагнитной вершине с право-киральным электроном, изображенным на рисунке (для лево-киральных электронов необходимо учитывать поправки с обменом W -бозоном)

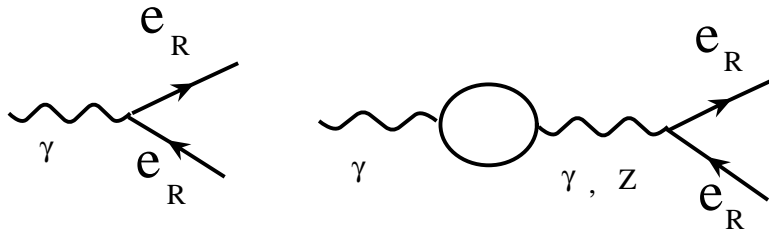


Рис. 4: Одевание фотонной вершины

Перейдем к пропагатору Z -бозона. Суммируя диаграммы



Рис. 5: Пропагатор Z -бозона

получим

$$G_{\mu\nu}^Z = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - M_{Z_0}^2 + \Pi_Z(k^2)} + \dots,$$

где многоточием обозначена не интересующая нас продольная часть пропагатора Z -бозона. Массе Z -бозона отвечает полюс полной функции Грина

$$M_Z^2 = M_{Z_0}^2 - \Pi_Z(M_Z^2), \quad M_{Z_0} = \frac{\bar{g}_0 \eta_0}{2}.$$

Поправки к древесной амплитуде распада мюона удобно разделить на две части: аналогичное рассмотренному "одевание" W -бозона, описываемое величиной $\Pi_W(0)$ (вклад продольной части $\Pi_{\mu\nu}$ подавлен как m_μ^2/m_W^2 и может быть опущен), и все остальные поправки, которые мы обозначим как D

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_0^2}{8M_{W_0}^2} \left[1 + \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} + D \right] = \frac{1}{2\eta_0^2} \left[1 + \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} + D \right].$$

Выпишем полученную нами систему уравнений

$$\begin{aligned} G_F &= \frac{1}{\sqrt{2}\eta_0^2} \left[1 + \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} + D \right], \\ M_Z^2 &= \frac{\bar{g}_0^2 \eta_0^2}{4} - \Pi_Z(M_Z^2), \\ 4\pi\bar{\alpha} &= g_0^2 \left(1 - \frac{g_0^2}{\bar{g}_0^2} \right) \left[1 - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} - 2 \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} \operatorname{tg} \theta \right]. \end{aligned}$$

и, обратив ее, найдем выражения для затравочных параметров

$$\eta_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}G_F} \left[1 + \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} + D \right],$$

$$\bar{g}_0^2 = 4\sqrt{2}G_F M_Z^2 \left[1 + \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} - D \right], \quad (2.2)$$

$$\frac{g_0}{\bar{g}_0} = \cos \theta \left[1 + \frac{\sin^2 \theta}{2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \left(\frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} - 2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} - D \right) \right],$$

где $\sin^2 \theta \cos^2 \theta \equiv \frac{\pi\bar{\alpha}}{\sqrt{2}G_F M_Z^2}$ (подчеркнем, что здесь угол θ определяется через значение бегущей константы связи, а не постоянной тонкой структуры при низких энергиях).

Формулы (2.2) решают поставленную задачу, выражая затравочные параметры теории через $\bar{\alpha}$, M_Z , G_F и радиационные поправки, содержащие ультрафиолетовые расходимости.

Перейдем теперь к вычислению массы W -бозона. При учете радиационных поправок имеем

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{g_0}{\bar{g}_0} \left[1 + \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{2M_Z^2} - \frac{\Pi_W(M_W^2)}{2M_W^2} \right].$$

Итак, налицо два источника отличия масс W - и Z -бозонов. Первый – разность в величинах зарядов g_0 и \bar{g}_0 . Второй – различие масс кварков в изоспиновом дублете в каждом поколении, что приводит, в свою очередь, к различию петлевых поправок к M_W и M_Z . Для лептонов и первых двух поколений кварков эффект мал, так как пропорционален отношению разницы квадратов масс фермионов к квадрату массы промежуточного бозона. Вклад третьего поколения в массу W -бозон оказывается усиленным из-за большой величины массы t -кварка $m_t \approx 175$ ГэВ, $m_t^2/M_Z^2 \approx 4$.

Подставляя в соотношение для $\frac{M_W}{M_Z}$ отношение затравочных зарядов из (2.2) и вводя для краткости обозначения $c \equiv \cos \theta$, $s \equiv \sin \theta$, окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{M_W}{M_Z} = & c + \frac{c^3}{2(c^2 - s^2)} \left(\frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} \right) + \\ & + \frac{cs^2}{2(c^2 - s^2)} \left(\frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} - 2\frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} - D \right) \end{aligned}$$

Непосредственным вычислением проверяется сокращение ультрафиолетовых расходимостей в полученной формуле.

В поляризационные операторы промежуточных векторных бозонов в одной петле дают вклад все фундаментальные частицы Стандартной Модели: кварки, лептоны, векторные бозоны, бозон Хиггса. Единственное исключение – глюоны, их вклад появляется на двухпетлевом уровне. В сравнении с остальными поправками параметрически усилен вклад третьего поколения кварков из-за большого нарушения глобальной $SU(2)_V$ симметрии разницей масс t - и b -кварков. Это нарушение приводит к усилению отличия Π_W от Π_Z , $\Pi_Z - \Pi_W \sim \alpha_W(m_t)^2$.

Бозон Хиггса – последняя не открытая на сегодняшний день частица Стандартной Модели. Нижнее ограничение на его массу $M_H > 114$ ГэВ следует из того, что на ускорителе LEP II при максимальной энергии столкновения e^+e^- -пары $\sqrt{s} = 210$ ГэВ не наблюдалась реакция $e^+e^- \rightarrow Z^* \rightarrow ZH$ с последующим распадом $H \rightarrow b\bar{b}$. Верхнее ограничение на M_H дают вычисления M_W и других наблюдаемых величин с учетом радиационных поправок.

Теперь рассмотрим усиленные вклады в поляризационные операторы, пропорциональные m_t^2 и $\ln M_H^2$. В приближении $m_t^2 \gg M_W^2, M_Z^2$ получаем, что вклад t -кварка в $\Pi_\gamma(M_Z^2)$ подавлен как M_Z^4/m_t^2 , то же относится к $\Pi_{\gamma Z}(0)$. Также ясно, что t -кварк не дает вклада в D . Поэтому окончательно приходим к

$$\frac{M_W}{M_Z} \approx c + \frac{c^3}{2(c^2 - s^2)} \left(\frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} \right) + \frac{cs^2}{2(c^2 - s^2)} \left(\frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} \right). \quad (2.3)$$

Проведем вычисление диаграммы

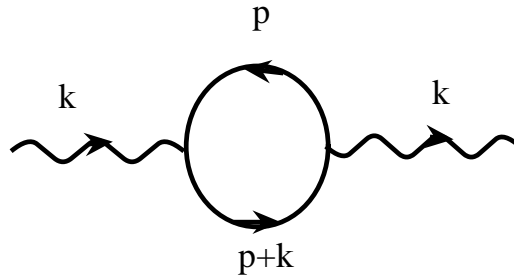


Рис. 6: Вклад фермионной петли в поляризационные операторы векторных бозонов

для случая векторных и аксиальных токов. Интегралы, отвечающие фермионным вкладам в поляризационный оператор

$$\Pi_{\mu\nu}^{\psi}(k) = \int \frac{d^4p}{i(2\pi)^4} \frac{Sp[\gamma_{\mu}(\gamma_5)(\hat{p} + m_1)\gamma_{\nu}(\gamma_5)(\hat{p} + \hat{k} + m_2)]}{(p^2 - m_1^2)((p+k)^2 - m_2^2)}$$

(здесь m_1 и m_2 – массы фермионов в пропагаторах, а γ_5 появляется в случае аксиальных токов), расходятся, и ниже для их регуляризации мы используем метод продолжения по размерности. Но вначале вычислим след произведения γ -матриц в числителе подинтегрального выражения

$$Sp[\gamma_{\mu}(\gamma_5)(\hat{p} + m_1)\gamma_{\nu}(\gamma_5)(\hat{p} + \hat{k} + m_2)] = 4(2p_{\mu}p_{\nu} + p_{\mu}k_{\nu} + p_{\nu}k_{\mu} - p^2g_{\mu\nu} - (pk)g_{\mu\nu} + (-)m_1m_2g_{\mu\nu})$$

(знак минус перед членом m_1m_2 появляется в случае аксиальных токов). Далее, применяя формулу фейнмановской параметризации

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2},$$

производя замену переменной интегрирования $q \equiv p + kx$ и используя тот факт, что $\int d^4q f(q^2)q_{\mu} = 0$, приходим к

$$\Pi_{\mu\nu}^{\psi}(k) = \int \frac{4dx d^4q}{i(2\pi)^4} \frac{[2q_{\mu}q_{\nu} - q^2g_{\mu\nu} + x(1-x)(k^2g_{\mu\nu} - 2k_{\mu}k_{\nu}) + (-)m_1m_2g_{\mu\nu}]}{[q^2 + k^2x(1-x) - m_2^2x - m_1^2(1-x)]^2}.$$

Регуляризуем этот интеграл, заменяя размерность пространства интегрирования на $D < 4$, применим формулу усреднения по направлениям $\int d^Dq f(q^2)q_{\mu}q_{\nu} = g_{\mu\nu}/D \int d^Dq f(q^2)q^2$ и, делая виковский поворот $q_0 \rightarrow iq_D$, получим интеграл по евклидову пространству

$$\Pi_{\mu\nu}^{\psi}(k) = \int \frac{4dx d^Dq}{(2\pi)^D(\mu)^{D-4}} \frac{q^2(1 - \frac{2}{D})g_{\mu\nu} + x(1-x)(k^2g_{\mu\nu} - 2k_{\mu}k_{\nu}) + (-)m_1m_2g_{\mu\nu}}{[q^2 - k^2x(1-x) + m_2^2x + m_1^2(1-x)]^2}$$

(множитель μ^{D-4} вводится для того, чтобы размерность поляризационного оператора не зависела от числа измерений пространства-времени). Для вычисления интеграла по импульсам нам понадобится знание лишь одного табличного интеграла

$$\int \frac{d^Dq (q^2)^s}{(q^2 + m^2)^{\alpha}} = \frac{\pi^{D/2}\Gamma(D/2 + s)\Gamma(\alpha - D/2 - s)}{\Gamma(D/2)\Gamma(\alpha)} (m^2)^{\frac{D}{2} - \alpha + s},$$

где $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера. В нашем частном случае

$$\int \frac{d^Dq (A + Bq^2)}{(q^2 + m^2)^2} = \frac{\pi^{D/2}}{(m^2)^{2 - \frac{D}{2}}} [A\Gamma(2 - D/2) + \frac{D}{2}Bm^2\Gamma(1 - D/2)].$$

Используя этот интеграл, после простых преобразований имеем

$$\Pi_{\mu\nu}^{\psi}(k) = \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{2^{D-2}\mu^{D-4}\pi^{D/2}} \int_0^1 dx \frac{2x(1-x)(k^2g_{\mu\nu} - k_{\mu}k_{\nu}) + g_{\mu\nu}((-)m_1m_2 - m_1^2(1-x) - m_2^2x)}{[m_1^2(1-x) + m_2^2x - k^2x(1-x)]^{2 - \frac{D}{2}}}.$$

Диагональный векторный ток сохраняется, поэтому в пределе $m_1 = m_2$ поляризационный оператор векторных токов должен быть поперечным. Очевидно, что в методе размерной регуляризации последнее требование автоматически выполняется – коэффициент при $g_{\mu\nu}$ во втором члене в числителе подынтегрального выражения тождественно равен нулю при $m_1 = m_2$. Поскольку нас интересует значение поляризационного оператора при $D = 4$, то, положив $D = 4 - 2\varepsilon$, применяя разложения $\Gamma(\varepsilon) = \Gamma(1 + \varepsilon)/\varepsilon = 1/\varepsilon - \gamma + O(\varepsilon)$ (здесь $\gamma \equiv -\Gamma'(1) = 0.577\dots$) и $a^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln a$ и отбрасывая зануляющиеся при $\varepsilon \rightarrow 0$ слагаемые, окончательно получим

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^\psi(k) = & \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right) \left[\frac{1}{3}(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(m_1^2 + m_2^2 - (+)2m_1 m_2) \right] - \right. \\ & - \int_0^1 dx [2x(1-x)(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) - g_{\mu\nu}(m_1^2(1-x) + m_2^2 x - (+)m_1 m_2)] \times \\ & \left. \times \ln \left(\frac{m_1^2(1-x) + m_2^2 x - q^2 x(1-x)}{\mu^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Перейдем к расчету вклада бозона Хиггса в поляризационные операторы. В одной петле нейтральный физический бозон Хиггса H не взаимодействует с фотоном, поэтому нас будут интересовать только поправки к Π_Z и Π_W

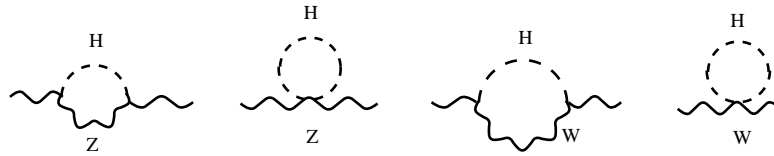


Рис. 7: Вклад хиггсовского бозона в поляризационные операторы векторных бозонов

Удобно проводить вычисления в унитарной калибровке, так как в ней отсутствуют нефизические степени свободы (голдстоуновские компоненты хиггсовского дублета). Соответствующие константы связи определяются из лагранжиана взаимодействия поля Хиггса с калибровочными бозонами (см. лекцию 1)

$$\begin{aligned} & \frac{g_0^2}{2} \eta H |W|^2 + \frac{g_0^2}{4} H^2 |W|^2 + \frac{\bar{g}_0^2}{4} \eta H Z^2 + \frac{\bar{g}_0^2}{8} H^2 Z^2 = \\ & = g_0 M_W H |W|^2 + \frac{g_0^2}{4} H^2 |W|^2 + \frac{\bar{g}_0}{2} M_Z H Z^2 + \frac{\bar{g}_0^2}{8} H^2 Z^2. \end{aligned}$$

Вычислим поправки к Π_W (поправки к Π_Z даются теми же формулами с заменой M_W на M_Z и g_0 на \bar{g}_0 ; лишние факторы $1/2$ в вершинах взаимодействия поля Хиггса и Z сокращаются увеличением числа спариваний для нейтральных полей Z). Начнем с первой из диаграмм (верхний индекс H показывает, что вычисляется вклад, зависящий от массы хиггсовского бозона)

$$\Pi_{\mu\nu}^{H(1)}(k) = g_0^2 M_W^2 \int \frac{d^4 p}{i(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{M_W^2}}{p^2 - M_W^2} \frac{1}{(k-p)^2 - M_H^2}.$$

После использования фейнмановской параметризации, замены переменной интегрирования $p \equiv q + kx$, регуляризации интеграла продолжением по размерности, применения формул усреднения по направлениям $\int d^D q f(q^2) q_\mu = 0$, $\int d^D q f(q^2) q_\mu q_\nu = g_{\mu\nu}/D \int d^D q f(q^2) q^2$ и отбрасывания продольной части $k_\mu k_\nu$ получим

$$\Pi_{\mu\nu}^{H(1)}(k) = g_{\mu\nu} g_0^2 M_W^2 \int \frac{dx d^D q}{i(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{1 - \frac{q^2}{DM_W^2}}{(q^2 + x(1-x)k^2 - xM_H^2 - (1-x)M_W^2)^2}.$$

Далее, делая виковский поворот $q_0 \equiv iq_0$, определяя $\Pi_{\mu\nu}^{H(1)}(k) \equiv g_{\mu\nu} \Pi^{H(1)}(k)$ и используя табличный интеграл, окончательно приходим к

$$\begin{aligned} \Pi^{H(1)}(k) &= \frac{g_0^2 M_W^2}{(2\pi)^D} \int \frac{dx}{\mu^{D-4}} \pi^{D/2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) [(1-x)M_W^2 + xM_H^2 - x(1-x)k^2]^{\frac{D}{2}-2} + \\ &+ \frac{g_0^2}{2(2\pi)^D} \int \frac{dx}{\mu^{D-4}} \pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) [(1-x)M_W^2 + xM_H^2 - x(1-x)k^2]^{\frac{D}{2}-1}. \end{aligned}$$

Вклад второй диаграммы ($\Pi_{\mu\nu}^{H(2)} \equiv g_{\mu\nu} \Pi^{H(2)}$)

$$\Pi^{H(2)} = \frac{g_0^2}{4} \int \frac{d^D p}{i(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{1}{p^2 - M_H^2} = -\frac{g_0^2}{4} \frac{\pi^{D/2}}{\mu^{D-4} (2\pi)^D} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (M_H^2)^{\frac{D}{2}-1}.$$

Очевидно, что эта добавка сокращается в разностях $\frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2}$ и $\frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2}$, и мы остаемся лишь с выражением для $\Pi^{H(1)}(k)$. Положим в нем $D = 4 - 2\varepsilon$ и, отбрасывая зануляющиеся при $\varepsilon \rightarrow 0$ члены, получим

$$\begin{aligned} \Pi^H(k) &= \frac{g_0^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma\right) \left[\frac{3}{4}M_W^2 - \frac{1}{4}M_H^2 + \frac{1}{12}k^2\right] + \\ &+ \frac{g_0^2}{16\pi^2} \left[M_W^2 \ln 4\pi - \left(\frac{1}{4}M_W^2 + \frac{1}{4}M_H^2 - \frac{1}{12}k^2\right) (\ln 4\pi + 1)\right] + \\ &+ \frac{g_0^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(- (1+x)M_W^2 + xM_H^2 - k^2 x(1-x)\right) \ln \left[\frac{(1-x)M_W^2 + xM_H^2 - k^2 x(1-x)}{\mu^2}\right]. \end{aligned}$$

При подстановке Π^H в формулы для физических наблюдаемых расходящиеся члены $\sim 1/\varepsilon$ не сокращаются, однако сокращается зависящая от массы бозона Хиггса часть $\sim M_H^2/\varepsilon$. Компенсация оставшейся (не зависящей от M_H) части первой строки требует учета вкладов векторных бозонов. Вторая строка также не дает зависящих от M_H вкладов в выражениях для физических наблюдаемых. Таким образом, мы приходим к следующему выражению, содержащему всю зависимость от M_H

$$\Pi^H = \frac{g_0^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(- (1+x)M_W^2 + xM_H^2 - k^2 x(1-x)\right) \ln \left[\frac{(1-x)M_W^2 + xM_H^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2}\right].$$

Перепишем это выражение, выделяя ведущие при больших M_H члены

$$\begin{aligned} \Pi^H = & \frac{g_0^2}{32\pi^2} \left\{ \int_0^1 dx x M_H^2 \left[\ln \frac{x M_H^2}{\mu^2} + \ln \left(1 + \frac{(1-x)M_W^2 - x(1-x)k^2}{x M_H^2} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \int_0^1 dx ((1+x)M_W^2 + x(1-x)k^2) \left[\ln \frac{x M_H^2}{\mu^2} + \ln \left(1 + \frac{(1-x)M_W^2 - x(1-x)k^2}{x M_H^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Асимптотика вклада хиггсовского бозона в $\Pi^H \sim M_H^2 \ln M_H^2$ сокращается в комбинациях поляризационных операторов $\frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2}$ и $\frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2}$, поэтому лидирующий вклад бозона Хиггса в физические наблюдаемые дается первым членом в квадратной скобке второй строки формулы (2.5)

$$\Pi^H = -\frac{g_0^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx ((1+x)M_W^2 + x(1-x)k^2) \ln \frac{M_H^2}{\mu^2} = -\frac{g_0^2}{32\pi^2} \left(\frac{3}{2}M_W^2 + \frac{1}{6}k^2 \right) \ln \frac{M_H^2}{\mu^2}.$$

Вследствие перенормируемости теории учет вклада петель векторных бозонов приведет к замене μ под знаком логарифма на M_W или M_Z – в нашем приближении положим $\mu = M_Z$. Добавляя вклад t -кварка в радиационные поправки (см. формулу (2.4)), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} &= -\frac{\bar{\alpha}}{8\pi} \frac{1}{6s^2} \ln \frac{M_H^2}{M_Z^2}, \\ \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} &= -\frac{\bar{\alpha}}{8\pi} \frac{5}{3c^2} \ln \frac{M_H^2}{M_Z^2} + \frac{3\bar{\alpha}}{16\pi c^2 s^2} \left(\frac{m_t}{M_Z} \right)^2, \end{aligned}$$

(напомним, что $c \equiv \cos \theta$, $s \equiv \sin \theta$). Подставляя эти выражения в формулу (2.3) имеем

$$\frac{M_W}{M_Z} = c + \frac{3\bar{\alpha}c}{32\pi s^2(c^2 - s^2)} \left[\left(\frac{m_t}{M_Z} \right)^2 - \frac{11s^2}{9} \ln \frac{M_H^2}{M_Z^2} \right].$$

Итак, мы решили задачу о нахождении лидирующих вкладов в радиационные поправки к отношению масс векторных бозонов. Подставляя измеренное на Тэватроне значение $m_t = 174 \pm 4$ ГэВ, мы можем определить значение M_H . Оказывается, что для сравнения теоретических формул с экспериментально измеренными значениями параметров Z - и W -бозонов необходим выход за рамки лидирующего приближения – постоянные члены не малы (что неудивительно, т.к. $\ln(M_H/M_Z)^2$ никогда не бывает значительно больше единицы). Приведем результаты фита трех параметров Стандартной Модели – бегущей константы связи квантовой хромодинамики $\alpha_s(M_Z)$, массы бозона Хиггса M_H и массы t -кварка – значениями экспериментально измеренных физических величин

$$M_H = 85_{-28}^{+39} \text{ ГэВ}, \quad \alpha_s(M_Z) = 0.118 \pm 0.003, \quad m_t = 172 \pm 2 \text{ ГэВ},$$

$$\chi^2/\text{число степеней свободы} = 16.7/12.$$

Отметим удовлетворительное качество фита и совпадение в пределах ошибок полученной массы t -кварка с ее экспериментальным значением.

Среднее значение M_H уже исключено экспериментально. Поэтому более поучительно смотреть на верхнее ограничение

$$M_H^{\text{рад. поправки}} < 166 \text{ ГэВ на } 95\% \text{ уровне достоверности,}$$

и сравнивать его с экспериментальным нижним ограничением

$$M_H^{\text{LEP II}} > 114 \text{ ГэВ.}$$

Хиггсовский бозон в этом интервале масс должен быть обнаружен на ускорителе ЛНС в течение ближайших 3 лет, что явится окончательным подтверждением хиггсовского происхождения масс элементарных частиц (адроны, состоящие из лёгких кварков, в этой терминологии элементарными частицами не являются), а также увенчает стройное здание Стандартной Модели.

Отметим, что добавление новых частиц (скажем, кварков и лептонов четвертого поколения) к Стандартной Модели приводит к дополнительным петлевым поправкам. При этом среднее значение M_H может оказаться значительно больше и достигать ~ 500 ГэВ. Тогда наряду с более тяжелым бозоном Хиггса на ЛНС должны найти новые частицы, участвующие в электрослабом взаимодействии.

Лекция 3. Матрица смешивания кварков: происхождение, параметризации, треугольники унитарности

3.1 Юкавовский сектор

Напомним, что в лагранжиан СМ нельзя ввести обычные массовые слагаемые¹, поскольку они нарушают фундаментальный принцип теории поля – калибровочную инвариантность (в случае СМ это группа $SU(2)_L \times U(1)_Y$): правые и левые компоненты кварковых полей имеют различные калибровочные квантовые числа. Эту проблему решает механизм спонтанного нарушения симметрии (механизм Хиггса). Для его реализации необходимо наличие в лагранжиане слагаемых, которые включают взаимодействие кварковых полей

¹Слагаемые типа $\Delta L = -m_q(\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L)$

и хиггсовского бозона – такие слагаемые называются юкавовскими (совершенно аналогичный подход применяется для лептонов). Для написания юкавовского сектора необходимо вспомнить, что существует три поколения кварков², включающих три дублета левых кварков

$$Q_L^i = \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L = \left(\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \right) \quad (1)$$

и шесть синглетов правых кварков

$$u_R^i = (u_R, c_R, t_R), \quad d_R^i = (d_R, s_R, b_R). \quad (2)$$

В юкавовском секторе нарушается флэйвор (напомним, что в квантовой хромодинамике флэйвор сохраняется). То есть в СМ благодаря взаимодействию кварковых полей с полем Хиггса первые перемешиваются.

Наиболее общее калибровочно инвариантное перенормируемое взаимодействие кварков с бозоном Хиггса записывается следующим образом:

$$\Delta L_{\text{Yukawa}} = f_{ik}^{(u)} \bar{Q}_L^i u_R^k \tilde{H} + f_{ik}^{(d)} \bar{Q}_L^i d_R^k H + \text{компл. сопр.}, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где Q_L^i , u_R^k и d_R^k – затравочные поля Стандартной Модели, H – хиггсовский дублет:

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$f_{ik}^{(u)}, f_{ik}^{(d)}$ – произвольные (не симметричные или эрмитовые) комплекснозначные матрицы, $\tilde{H} \equiv \varepsilon_{ab} H_b^*$.

Теперь обсудим генерацию масс кварков. Спонтанное нарушение симметрии происходит в результате минимизации хиггсовского потенциала. Как следствие нейтральная компонента хиггсовского бозона приобретает ненулевое вакуумное среднее $\langle H^0 \rangle = v$. Подставляя в (3) вакуумное среднее хиггсовского поля, приходим к следующим массовым слагаемым:

$$\Delta L_{\text{Yukawa}} = M_{(u)}^{ik} \bar{u}_L^i u_R^k + M_{(d)}^{ik} \bar{d}_L^i d_R^k + \text{компл. сопр.} \quad (5)$$

Массовые матрицы $M_{(u)}^{ik}, M_{(d)}^{ik}$ – произвольные комплексные матрицы 3×3 . Для их диагонализации воспользуемся следующей теоремой: произвольная матрица может быть представлена в виде произведения эрмитовой и унитарной матриц:

$$M = UH, \quad \text{где} \quad H = H^+, \quad \text{и} \quad U^+ = U^{-1}, \quad (6)$$

²В дальнейшем мы увидим, что три – минимальное количество поколений, необходимое для нарушения СР-инвариантности в юкавовском секторе.

(не путать эрмитову матрицу H и поле хиггса), что соответствует выделению модуля и фазы комплексного числа:

$$a = e^{i\phi}|a|. \quad (7)$$

Из (6) следует, что матрица может быть диагонализирована действием двух различных унитарных матриц справа и слева:

$$U_L M_{(u)} U_R^+ = M_{diag} = \begin{pmatrix} m_u & & 0 \\ & m_c & \\ 0 & & m_t \end{pmatrix} \quad (8)$$

где m_i – массы u , c и t кварков. (В частном случае эрмитовой матрицы M $U_L = U_R$.)

Теперь, объединяя (8) и (5), получим (для первого слагаемого):

$$\begin{aligned} \Delta L_{up} &= \bar{u}_L^i M_{(u)}^{ik} u_R'^k + \text{компл. сопр.} \equiv \bar{u}_L' U_L^+ U_L M_{(u)} U_R^+ U_R u_R' + \text{компл. сопр.} \\ &= \bar{u}_L M_{diag} u_R + \text{компл. сопр.} \quad , \end{aligned} \quad (9)$$

где мы ввели поля $u_L = U_L u_L'$ и $u_R = U_R u_R'$, которые соответствуют массовым состояниям u -кварков. Пропедевывая аналогичную процедуру для второго слагаемого в (5), получим массовые состояния для d кварков: $d_L = D_L d_L'$ и $d_R = D_R d_R'$. Таким образом, производя вращение кварковых полей, мы переходим от затравочных полей к массовым состояниям.

Здесь сразу же возникает вопрос: можно ли измерить матричные элементы матриц U_L, U_R, D_L и D_R или их комбинации экспериментально? Ответ на этот вопрос достаточно тривиален с математической стороны, но он соответствует нетривиальным физическим процессам. В КХД, как мы уже сказали, массовые состояния кварков совпадают с собственными состояниями теории. Поэтому никакие процессы КХД не содержат матриц вращения. Также они выпадают из электромагнитного тока J_{EM}^μ :

$$\bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i = \bar{u}_L^i U^{+ij} \gamma^\mu U^{jk} u_L^k = \bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i, \quad (10)$$

и из Z^0 тока. Единственным членом лагранжиана СМ, который содержит U и D матрицы, является член взаимодействия W^\pm -бозона с кварковым током:

$$\Delta L = g W_\mu^+ \bar{u}_L' \gamma_\mu d_L' = g W_\mu^+ \bar{u}_L \gamma_\mu U_L^+ D_L d_L. \quad (11)$$

Таким образом, только слабые взаимодействия с обменом W -бозоном перемешивают массовые состояния кварков. Унитарная матрица $V_{CKM} \equiv U_L^+ D_L$ – называется матрицей Кабиббо-Кобаяши-Маскава (по-английски Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)). Эта матрица является фундаментальной для физики ароматов и объяснения СР-нарушения.

3.2 Матрица СКМ: углы и фазы

В прошлой секции мы ввели матрицу $V_{СКМ}$ как произведение двух матриц, осуществляющих вращения кварковых полей. Определим число независимых параметров $V_{СКМ}$.

В общем случае унитарная матрица $n \times n$ имеет $n^2/2$ комплексных или n^2 вещественных параметров. Ортогональная матрица $n \times n$ определяется $n(n-1)/2$ углами (три угла Эйлера в случае $n=3$). Поэтому параметры унитарной матрицы поделены между углами и фазами согласно следующему соотношению:

$$n^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \quad (12)$$

Следующий вопрос: являются ли все фазы физическими (наблюдаемыми на эксперименте) или нет? Ответ – нет, так как мы можем совершить фазовое преобразование кварковых полей ($u_L \rightarrow e^{i\xi} u_L, d_L \rightarrow e^{i\xi} d_L, \dots$), удалив тем самым из матрицы СКМ $(2n-1)$ фаз (одна фаза вычитается, так как поворот всех верхних кварков на один и тот же угол преобразует СКМ матрицу так же, как и поворот на тот же угол в противоположную сторону всех нижних кварков).

Окончательно для количества наблюдаемых фаз мы получаем:

$$\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad (13)$$

Здесь мы впервые столкнулись с тем фактом, что количество кварк-лептонных поколений равное трем приводит к существованию одной наблюдаемой фазы.

Напомним, почему для нас так важно существование трех поколений.

В 1956 г. Ли и Янг, решая $\theta - \tau$ проблему, предположили, что слабые взаимодействия нарушают Р-четность. Вскоре было установлено, что теория Ли и Янга также нарушает С-четность. В 1957 г. Ландау, пытаясь воскресить Р-четность, высказал идею о том, что слабые взаимодействия должны быть инвариантны относительно одновременного Р-преобразования и С-сопряжения. Или, другими словами, слабые взаимодействия инвариантны относительно одновременной замены $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ и заряженной частицы на ее античастицу (электрон на позитрон и т.д.). Таким образом устанавливалось, что СР-симметрия – основная симметрия слабых взаимодействий. Однако это утверждение существовало недолго, и в 1964 г. было открыто нарушение СР-инвариантности в каонных системах.

Это явление заключалось в следующем. В природе существует два типа нейтральных каонов: одни из них – долгоживущие, другие – короткоживущие, $\tau(K_L) \sim 5 \times 10^{-8} \text{с}$, $\tau(K_S) \sim 10^{-10} \text{с}$ – соответственно. Основной СР разрешенной модой распада короткоживущего K_S

является двухпионный распад. Долгоживущий K_L распадается на три пиона. Однако в 1964 г. был открыт двухпионный распад долгоживущего каона $K_L \longrightarrow \pi^+\pi^-(\pi^0\pi^0)$ на уровне $\sim 10^{-3}$ от основной моды. Поэтому если в "идеальном мире" K_L имеет CP четность -1 , а $K_S - +1$, то в реальном мире эти частицы вообще не имеют определенного значения CP-четности. Через тридцать лет был сделан второй важный экспериментальный шаг в исследовании CP-нарушения: было установлено, что

$$\frac{\Gamma(K_L \longrightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_S \longrightarrow \pi^+\pi^-)} \neq \frac{\Gamma(K_L \longrightarrow \pi^0\pi^0)}{\Gamma(K_S \longrightarrow \pi^0\pi^0)} \quad (\varepsilon' \neq 0) . \quad (14)$$

Долгое время CP нарушение наблюдалось только в каонных системах. И только в 2001 г. оно было обнаружено в распадах B_d -мезонов: найдено нарушение CP во временной зависимости вероятностей распадов

$$a(t) = \frac{N(B_d \longrightarrow J/\Psi K) - N(\bar{B}_d \longrightarrow J/\Psi K)}{N(B_d \longrightarrow J/\Psi K) + N(\bar{B}_d \longrightarrow J/\Psi K)} \neq 0. \quad (15)$$

Таким образом, с 1964 г. мы знаем, что CP-симметрия нарушена. В частности, CP-сопряженные парциальные ширины не равны друг другу:

$$\Gamma(A \longrightarrow BC) \neq \Gamma(\bar{A} \longrightarrow \bar{B}\bar{C}). \quad (16)$$

Попробуем объяснить, почему большое число поколений необходимо для возникновения CP-нарушения. Рассмотрим простейший процесс распада скалярной частицы на две другие скалярные частицы. Часть лагранжиана взаимодействия, которая ответственна за этот распад:

$$L = \lambda AB^*C^* + \lambda^* A^*BC. \quad (17)$$

Совершая CP преобразование мы получим:

$$L_{CP} = \lambda A^*BC + \lambda^* AB^*C^*, \quad (18)$$

Два лагранжиана совпадают, только если λ вещественна. Поэтому для CP-нарушения необходима комплексная константа взаимодействия. Мы можем переопределить поле , внося в него фазовый множитель: $A = e^{i\psi} A'$. Такое переопределение сделает константу взаимодействия вещественной. Теперь, добавив еще одно дополнительное поле (например D), мы введем новые константы взаимодействия ($\lambda_1 DBC + \lambda_2 DAB + \lambda_3 DAC$). Переопределением поля $D = e^{i\alpha} D'$ можно сделать вещественной только одну константу: константы взаимодействия размножаются быстрее, чем поля. Именно поэтому для CP-нарушения в модели Кобаяши-Маскава необходимо несколько поколений кварков.

3.3 Параметризации матрицы СКМ

Заряженный кварковый ток в Стандартной Модели имеет вид:

$$(\bar{u}ct)_L \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L, \quad (19)$$

где матричные элементы V_{ik} зависят, вообще говоря, от четырех параметров (трех углов и одной фазы). Существует много видов параметризаций матрицы СКМ. В этом пункте мы обсудим так называемую стандартную параметризацию.

Матрица V может быть получена вращением в трех взаимно перпендикулярных плоскостях (12), (13), (23). Обозначим соответствующие матрицы вращений R_{12}, R_{13}, R_{23} . Углы поворотов θ_{ij} называются углами смешивания. Фазу δ можно включить только в R_{13} , в противном случае от нее можно было бы избавиться переопределением кваркового поля. Тогда V запишется в виде:

$$V_{CKM} = R_{23} \times R_{13} \times R_{12}, \quad (20)$$

$$R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix},$$

$$R_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}, \quad R_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

и, окончательно,

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{23}s_{12} - s_{23}s_{13}c_{12}e^{i\delta} & c_{23}c_{12} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - c_{23}s_{13}s_{12}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$ и $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$. Экспериментальные данные свидетельствуют о следующей иерархии углов смешивания:

$$s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1. \quad (23)$$

Наибольшей популярностью пользуется параметризация Вольфенштейна. Сделаем следующую замену переменных в (22) :

$$s_{12} = \lambda, \quad s_{23} = A\lambda^2, \quad s_{13}e^{-i\delta} = A\lambda^3(\rho - i\eta), \quad (24)$$

и разложим матричные элементы в ряды по λ . Тогда матрица V_{CKM} представится в виде:

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\bar{\rho} - i\bar{\eta}) \\ -\lambda - iA^2\lambda^5\bar{\eta} & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}) & -A\lambda^2 - iA\lambda^4\bar{\eta} & 1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где

$$\bar{\rho} \equiv \rho\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right), \quad \bar{\eta} \equiv \eta\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right). \quad (26)$$

Ненулевое η описывает CP нарушение в Стандартной Модели. Это аналог δ в стандартной параметризации.

3.4 Треугольник унитарности

Унитарность матрицы V_{CKM} накладывает требование ортогональности строк и столбцов (всего шесть уравнений). Эти условия ортогональности могут быть представлены как треугольники в комплексной плоскости (каждое слагаемое отвечает определенной стороне треугольника).

$$\begin{aligned} V_{ud}^*V_{us} &+ V_{cd}^*V_{cs} &+ V_{td}^*V_{ts} &= 0, \\ \sim \lambda &\sim \lambda &\sim \lambda^5 & \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} V_{ud}^*V_{ub} &+ V_{cd}^*V_{cb} &+ V_{td}^*V_{tb} &= 0, \\ \sim \lambda^3 &\sim \lambda^3 &\sim \lambda^3 & \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} V_{us}^*V_{ub} &+ V_{cs}^*V_{cb} &+ V_{ts}^*V_{tb} &= 0, \\ \sim \lambda^4 &\sim \lambda^2 &\sim \lambda^2 & \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} V_{ud}V_{cd}^* &+ V_{us}V_{cs}^* &+ V_{ub}V_{cb}^* &= 0, \\ \sim \lambda &\sim \lambda &\sim \lambda^5 & \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} V_{ud}V_{td}^* &+ V_{us}V_{ts}^* &+ V_{ub}V_{tb}^* &= 0, \\ \sim \lambda^3 &\sim \lambda^3 &\sim \lambda^3 & \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} V_{cd}V_{td}^* &+ V_{cs}V_{ts}^* &+ V_{cb}V_{tb}^* &= 0, \\ \sim \lambda^4 &\sim \lambda^2 &\sim \lambda^2 & \end{aligned} \quad (32)$$

Задача. Докажите, что площади всех треугольников одинаковы.

Видно, что только у двух треугольников (28) и (31) длины всех сторон одного порядка по λ . Легко обнаружить, что эти два треугольника почти совпадают.

Таким образом, имеется всего один независимый невырожденный треугольник. Возьмем в качестве него треугольник (28):

$$V_{ud}^*V_{ub} + V_{cd}^*V_{cb} + V_{td}^*V_{tb} = 0, \quad (33)$$

см. рисунок.

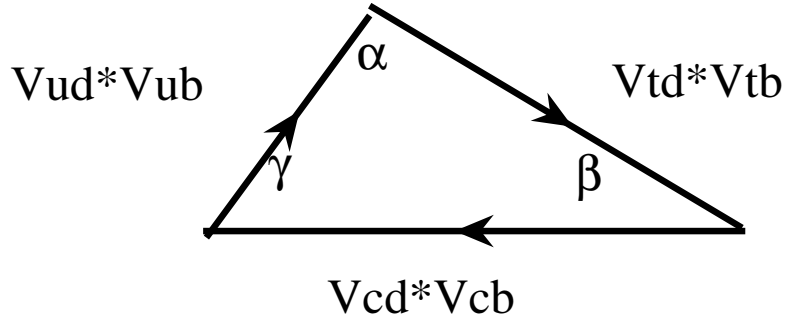


Рис. 8: Треугольник унитарности

Введем три угла (β, α, γ) (согласно терминологии коллаборации BABAR) или, эквивалентно, (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) (согласно терминологии коллаборации Belle). Эти углы определяются из нарушения CP в распадах B -мезонов. Легко получить следующие соотношения:

$$\beta = \pi - \arg \left(\frac{V_{tb}^*V_{td}}{V_{cb}^*V_{cd}} \right) = \phi_1, \quad (34)$$

$$\alpha = \arg \left(\frac{V_{tb}^*V_{td}}{-V_{ub}^*V_{ud}} \right) = \phi_2, \quad (35)$$

$$\gamma = \arg \left(\frac{V_{ub}^*V_{ud}}{-V_{cb}^*V_{cd}} \right) = \phi_3. \quad (36)$$

Обычно треугольник подвергают масштабному преобразованию, полагая длину его основания $|V_{cd}^*V_{cb}|$ равной единице.

Угол $\beta(\phi_1)$ был с хорошей точностью измерен из временной зависимости CP-нарушения в распадах $B_d^0(\bar{B}_d^0) \rightarrow J/\psi K$, угол $\alpha(\phi_2)$ был также измерен из временной зависимости

CP-нарушения в распадах $B_d^0(\bar{B}_d^0) \rightarrow \rho^+\rho^-$, но с худшей точностью, и с совсем плохой точностью определен $\gamma(\phi_3)$ из CP-нарушения в распадах $B_u(\bar{B}_u)$ -мезонов.

Также треугольник унитарности можно восстановить по длинам его сторон, т.е. изучая CP-инвариантные величины ($\text{Br}(B \rightarrow X_c l \nu), \text{Br}(B \rightarrow X_u l \nu)$ и частоту $B_d - \bar{B}_d$ (и/или $B_s - \bar{B}_s$) осцилляций).

Отметим, что умножение любого кваркового поля на произвольную фазу не меняет треугольника унитарности – оно соответствует просто вращению его в комплексной плоскости.

Лекция 4. Величины сторон треугольника унитарности; осцилляции мезонов.

4.1 V_{us}, V_{cb}, V_{ub} – первый круг

В предыдущей лекции мы обсудили происхождение матрицы СКМ и построили треугольник унитарности. На современном этапе развития физики элементарных частиц стороны унитарного треугольника и его углы не могут быть определены теоретически из первых принципов, по причине отсутствия таковых. Зато имеется много экспериментальных данных из анализа которых можно восстановить стороны и углы. В этом разделе мы обсудим, как можно определить одну сторону треугольника унитарности, исходя только из древесных диаграмм.

Наиболее точно определена величина V_{us} . Ее значение находится экстраполяцией форм-фактора $f_+(q^2)$ полулептонного распада $K^0 \rightarrow \pi e \nu$ в точку $q^2 = 0$, где q – четырехимпульс лептонной пары. Согласно теореме Адемолло–Гато, поправки к CVC значению $f_+(0) = 1$ имеют второй порядок по нарушению флэйворной симметрии $SU(3)$ массой s -кварка. С учетом этих малых поправок получено:

$$V_{us} \equiv \lambda = 0.226 \pm 0.002 \quad . \quad (37)$$

Другие параметры Вольфенштейна определены с худшей точностью.

Значение V_{cb} определяется из инклюзивных и эксклюзивных полулептонных распадов B -мезонов с образованием очарованных мезонов. На уровне кварков этот распад идет за счет $b \rightarrow c l \nu$ -переходов. Точность сейчас на уровне 1.5%:

$$V_{cb} = (41.7 \pm 0.7) \times 10^{-3} \quad (38)$$

Здесь ошибка возникает, в основном, из-за теоретической неопределенности. Из (25) и (38) получаем значение параметра A :

$$A \equiv \frac{V_{cb}}{\lambda^2} = 0.81 \pm 0.02. \quad (39)$$

Из формулы для инклюзивной ширины полулептонного распада:

$$\Gamma_{SL} \sim |V_{cb}|^2 (m_b - m_c)^5 \quad (40)$$

понятно, что заявляемая ошибка в V_{cb} требует точности в определении разницы масс кварков порядка 1%.

Значение $|V_{ub}|$ определяется из полулептонных распадов B -мезонов без образования s -кварка в конечном состоянии: $b \rightarrow ul\nu$. $b \rightarrow cl\nu$ распад приблизительно в 100 раз вероятнее, чем $b \rightarrow ul\nu$, поэтому исследования проводятся на высокоэнергетическом хвосте заряженных лептонов. Теоретический анализ таких полуинклюзивных процессов достаточно сложен, что приводит к большим теоретическим погрешностям. Используются также эксклюзивные распады, например, $B \rightarrow \pi l\nu$, формфакторы которых вычисляются на решетках. Заявляемая точность V_{ub} достигает 10%:

$$|V_{ub}| = (4.1 \pm 0.4) 10^{-3}, \quad (41)$$

что соответствует кругу радиуса $\sqrt{\bar{\rho}^2 + \bar{\eta}^2} = 0.44 \pm 0.04$ на комплексной области $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$ с центром в точке $(0, 0)$.

4.2 CP-состояния, массовые состояния, осцилляции

В предыдущем разделе мы ввели треугольник унитарности и определили длину одной из его сторон. Принципиальные трудности могут возникнуть при определении длины стороны, пропорциональной V_{td} . В первой лекции мы нашли время жизни t -кварка. Оно так мало, что адроны, которые включали бы t -кварк, не успевают образоваться. К счастью, природа подарила нам замечательное явление – осцилляции нейтральных частиц, из измерения частоты которых, как мы увидим дальше, можно получить значение V_{td} . Имеется четыре типа осциллирующих частиц:

$$\begin{aligned} K^0(\bar{s}d) - \bar{K}^0(s\bar{d}), \quad D^0(c\bar{u}) - \bar{D}^0(\bar{c}u), \\ B_d^0(\bar{b}d) - \bar{B}_d^0(b\bar{d}), \quad B_s^0(\bar{b}s) - \bar{B}_s^0(b\bar{s}). \end{aligned} \quad (42)$$

Переходы происходят за счет изображенной на рисунке ящичной диаграммы.

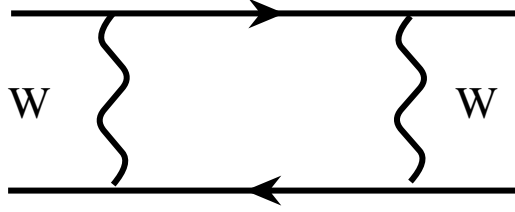


Рис. 9: Переход $M^0 - \bar{M}^0$

Далее в этом разделе мы обсудим общий формализм, описывающий смешивание частиц и античастиц.

Для описания осцилляций используется эффективный гамильтониан H , имеющий вид 2×2 матрицы. Выберем базис системы $M^0 - \bar{M}^0$ в виде $M^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{M}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. CP-преобразование нейтральных мезонных полей допускает произвол в выборе фазы. Выберем ее так, что:

$$CP|M^0 \rangle = |\bar{M}^0 \rangle, \quad CP|\bar{M}^0 \rangle = |M^0 \rangle. \quad (43)$$

Эффективный гамильтониан неэрмитов, так как он учитывает распады частиц. Его удобно представить в виде суммы эрмитовой и антиэрмитовой матриц: $H = M - \frac{i}{2}\Gamma$, где M и Γ – эрмитовые.

Система $M^0 - \bar{M}^0$ эволюционирует согласно уравнению Шредингера

$$i\frac{d\psi}{dt} = H\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} e^{-i\lambda t} \quad (44)$$

Согласно СРТ теореме диагональные элементы H равны между собой:

$$\langle M^0 | H | M^0 \rangle = \langle \bar{M}^0 | H | \bar{M}^0 \rangle. \quad (45)$$

С учетом этого (44) сводится к следующему уравнению:

$$\begin{pmatrix} M - \frac{i}{2}\Gamma & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^* & M - \frac{i}{2}\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad (46)$$

из которого находятся собственные значения λ_{\pm} и собственные вектора M_{\pm} :

$$\lambda_{\pm} = M - \frac{i}{2}\Gamma = \sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)} \quad (47)$$

$$\begin{cases} M_+ = pM^0 + q\bar{M}^0 \\ M_- = pM^0 - q\bar{M}^0 \end{cases}, \quad \frac{q}{p} = \sqrt{\frac{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}}}. \quad (48)$$

Умножая M^0 на $e^{i\phi}$ мы изменяем фазу q/p , поэтому $\arg(q/p)$ не есть физическая наблюдаемая. Собственные вектора M_+ и M_- , вообще говоря, не ортогональны:

$$\langle M_+ | M_- \rangle = |p|^2 - |q|^2 \neq 0. \quad (49)$$

Однако если в смешивании нет CP-нарушения, тогда:

$$\langle M^0 | H | \bar{M}^0 \rangle = \langle \bar{M}^0 | H | M^0 \rangle, \quad M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} = M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*, \quad (50)$$

и в этом случае:

$$\frac{|q|}{|p|} = 1, \quad \langle M_+ | M_- \rangle = 0. \quad (51)$$

Итак, CP-нарушение в смешивании имеет место тогда и только тогда, когда собственные вектора гамильтониана H неортогональны.

Введем величину $\tilde{\varepsilon}$ следующим образом:

$$\frac{q}{p} \equiv \frac{1 - \tilde{\varepsilon}}{1 + \tilde{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}}} \quad (52)$$

Видно, что если $Re\tilde{\varepsilon} \neq 0$, то CP-симметрия нарушена. Для собственных векторов получим:

$$\begin{aligned} M_+ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\tilde{\varepsilon}|^2}} \left[\frac{M^0 + \bar{M}^0}{\sqrt{2}} + \tilde{\varepsilon} \frac{M^0 - \bar{M}^0}{\sqrt{2}} \right], \\ M_- &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\tilde{\varepsilon}|^2}} \left[\frac{M^0 - \bar{M}^0}{\sqrt{2}} + \tilde{\varepsilon} \frac{M^0 + \bar{M}^0}{\sqrt{2}} \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Следующие комбинации M^0 и \bar{M}^0 обладают определенной CP-четностью:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{M^0 + \bar{M}^0}{\sqrt{2}}, & CP |M_1 \rangle &= |M_1 \rangle \\ M_2 &= \frac{M^0 - \bar{M}^0}{\sqrt{2}}, & CP |M_2 \rangle &= -|M_2 \rangle \end{aligned} \quad (54)$$

4.3 $B_{d(s)}^0 - \bar{B}_{d(s)}^0$ - смешивание. Второй круг

Осцилляции $B_d^0 - \bar{B}_d^0$ происходят за счет диаграммы, изображенной на рис. 9. В случае $B_s^0 - \bar{B}_s^0$ -осцилляций необходимо сделать замену $d \rightarrow s, \bar{d} \rightarrow \bar{s}$. Эти диаграммы обуславливают ненулевое значение недиагонального матричного элемента M_{12} , которое приводит

к расщеплению масс мезонов. Опустим на время индексы s, d . Пользуясь (48), запишем массовые состояния системы $B^0 - \bar{B}^0$:

$$B_H = pB^0 + q\bar{B}^0, \quad B_L = pB^0 - q\bar{B}^0, \quad (55)$$

где, согласно (52),

$$p = \frac{1 + \bar{\varepsilon}_B}{\sqrt{2(1 + |\bar{\varepsilon}_B|^2)}}, \quad q = \frac{1 - \bar{\varepsilon}_B}{\sqrt{2(1 + |\bar{\varepsilon}_B|^2)}}. \quad (56)$$

Здесь $\bar{\varepsilon}_B$ – обозначает $\tilde{\varepsilon}$ для систем $B^0 - \bar{B}^0$ мезонов. Буквы H и L обозначают *Heavy* и *Light*, соответственно.

С учетом того, что $\Delta M \gg \Delta \Gamma$, для разности масс получим:

$$\Delta M_{d(s)} = M_H^{d(s)} - M_L^{d(s)} = 2|M_{12}^{d(s)}|. \quad (57)$$

Вернемся к вычислению изображенной на рисунке диаграммы. В переходах $b \rightarrow d$ номер поколения меняется на два, поэтому вклады всех трех виртуальных верхних (up) кварков имеют одинаковую степень подавления по параметру СКМ матрицы $\lambda: \sim \lambda^3$. С другой стороны, диаграмма пропорциональна квадратам масс кварков. Поэтому, так как $m_t \gg m_c, m_u$, основной вклад дает t -кварк:

$$A_{B_d^0 - \bar{B}_d^0} \sim |V_{td}|^2 \langle B_d | (\bar{d}b)(\bar{b}b) | \bar{B}_d \rangle = |V_{td}|^2 B_{B_d} \langle B_d | \bar{d}b | 0 \rangle \langle 0 | \bar{d}b | \bar{B}_d \rangle, \quad (58)$$

где во втором равенстве константа B_{B_d} учитывает поправку к вакуумному прокладыванию. Матричный элемент $\langle B_d | \bar{d}b | 0 \rangle$ может быть записан следующим образом:

$$\langle B_d | \bar{d}b | 0 \rangle_\alpha = \langle B_d | \bar{d} \gamma_\alpha (1 + \gamma^5) b | 0 \rangle = f_{B_d} P_\alpha \quad (59)$$

P_α – четырехимпульс, f_{B_d} – параметр размерности массы. Значения f_{B_d} и B_{B_d} находятся при помощи вычислений на решетке:

$$B_{B_d} = 1.3 \pm 0.1, \quad f_{B_d} = (200 \pm 30) \text{MeV} \quad (60)$$

Аналогичные формулы имеют место и для $B_s - \bar{B}_s$ -переходов.

В 2006 г. экспериментаторам удалось наконец измерить частоту $B_s - \bar{B}_s$ -осцилляций, равную ΔM_{B_s} (частота $B_d - \bar{B}_d$ -осцилляций была измерена 20 лет назад). Объединяя (57), (58) и (59), получим для отношения разности масс $B_d^0 - \bar{B}_d^0$ и $B_s^0 - \bar{B}_s^0$ выражение:

$$\frac{\Delta M_{B_d}}{\Delta M_{B_s}} = \left(\frac{V_{td}}{V_{ts}} \right)^2 \frac{B_{B_d} f_{B_d}^2}{B_{B_s} f_{B_s}^2} = \frac{(0.507 \pm 0.005) 10^{12} \text{сек}^{-1}}{(17.77 \pm 0.12) 10^{12} \text{сек}^{-1}} = \frac{1}{35.0 \pm 0.5}. \quad (61)$$

В отношении многие расчетные погрешности в f_{B_d}, B_{B_d} и f_{B_s}, B_{B_s} взаимоуничтожаются, поэтому можно достаточно точно определить значение V_{td} . Согласно последним решеточным результатам,

$$\frac{f_{B_s} \sqrt{B_{B_s}}}{f_{B_d} \sqrt{B_{B_d}}} = 1.21 \pm 0.04. \quad (62)$$

Следовательно, используя имеющее хорошую точность равенство $V_{ts} = V_{cb}$, мы получим:

$$V_{td} = (8.5 \pm 0.3)10^{-3} . \quad (63)$$

Формулы (37), (38), (41) и (63) определяют длины трех сторон треугольника унитарности.

Лекция 5. Определение углов треугольника унитарности.

Найдя длины сторон треугольника унитарности в прошлой лекции, с помощью элементарной геометрии мы можем определить величины его углов. Сравнивая их со значениями углов, извлекаемых из нарушения CP-симметрии в распадах B-мезонов, мы можем обнаружить разницу, что будет свидетельствовать о наличии Новой Физики.

5.1 CP-нарушение при интерференции распадов и смешивания

Рассмотрим временную эволюцию мезона, рожденного с определенным флэйвором:

$$\begin{aligned} |B^0(t)\rangle &= \frac{e^{-i\lambda_+t} + e^{-i\lambda_-t}}{2} |B^0\rangle + \frac{q}{p} \frac{e^{-i\lambda_+t} - e^{-i\lambda_-t}}{2} |\bar{B}^0\rangle = \\ &= e^{-i(M_L+M_S)/2 - \Gamma t/2} \left[\cos\left(\frac{\Delta m t}{2}\right) |B^0\rangle + i \frac{q}{p} \sin\left(\frac{\Delta m t}{2}\right) |\bar{B}^0\rangle \right] \\ |\bar{B}^0(t)\rangle &= \frac{e^{-i\lambda_+t} + e^{-i\lambda_-t}}{2} |\bar{B}^0\rangle + \frac{p}{q} \frac{e^{-i\lambda_+t} - e^{-i\lambda_-t}}{2} |B^0\rangle = \\ &= e^{-i(M_L+M_S)/2 - \Gamma t/2} \left[i \frac{p}{q} \sin\left(\frac{\Delta m t}{2}\right) |B^0\rangle + \cos\left(\frac{\Delta m t}{2}\right) |\bar{B}^0\rangle \right] , \end{aligned} \quad (64)$$

где M_S – масса M_+ -мезона, M_L – масса M_- -мезона, $\Delta M \equiv M_L - M_S$.

Для упрощения формул мы пренебрегли относительно малой разницей времен жизни и положили $\Gamma_S = \Gamma_L \equiv \Gamma$. Вводя амплитуды распада следующим образом:

$$\begin{aligned} A_f &= A(B^0 \longrightarrow f), & \bar{A}_f &= A(\bar{B}^0 \longrightarrow f) \\ A_{\bar{f}} &= A(B^0 \longrightarrow \bar{f}), & \bar{A}_{\bar{f}} &= A(\bar{B}^0 \longrightarrow \bar{f}) , \end{aligned} \quad (65)$$

легко получим выражения для временной зависимости вероятностей распадов мезонов, имевших в момент образования определенный флэйвор:

$$\begin{aligned}
P_{B^0 \rightarrow f}(t) &= e^{-\Gamma t} |A_f|^2 \left[\cos^2\left(\frac{\Delta mt}{2}\right) + \left|\frac{q\bar{A}_f}{pA_f}\right|^2 \sin^2\left(\frac{\Delta mt}{2}\right) - \text{Im}\left(\frac{q\bar{A}_f}{pA_f}\right) \sin(\Delta mt) \right], \\
P_{\bar{B}^0 \rightarrow \bar{f}}(t) &= e^{-\Gamma t} |\bar{A}_{\bar{f}}|^2 \left[\cos^2\left(\frac{\Delta mt}{2}\right) + \left|\frac{pA_{\bar{f}}}{q\bar{A}_{\bar{f}}}\right|^2 \sin^2\left(\frac{\Delta mt}{2}\right) - \text{Im}\left(\frac{pA_{\bar{f}}}{q\bar{A}_{\bar{f}}}\right) \sin(\Delta mt) \right].
\end{aligned} \tag{66}$$

Пусть конечное состояние f имеет определенную CP-четность: $\bar{f} = \eta_f f$ где $\eta_f = +(-)$ для CP-четных (нечетных) f . (Два примера таких распадов: $B^0 \rightarrow J/\psi K_{S(L)}$ и $B^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ описываются диаграммами, изображенными на рисунках. Аналогичная диаграмма описывает \bar{B}^0 -распад в такое же конечное состояние).

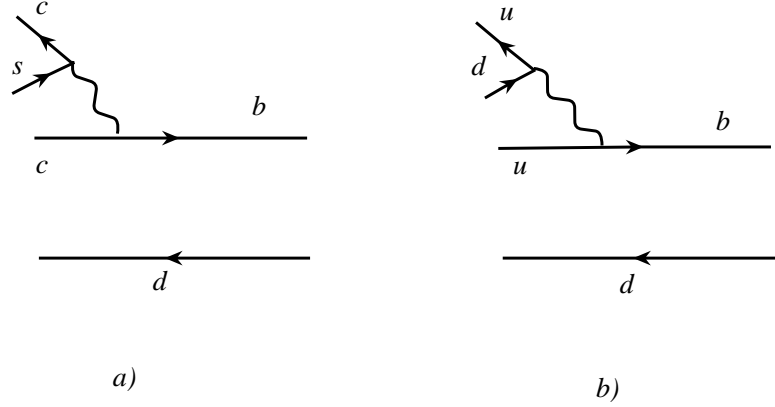


Рис. 10: $B^0 \rightarrow J/\psi K_{S(L)}$ и $B^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ распады описываются этими кварковыми диаграммами

Тогда:

$$A_{\bar{f}} = \eta_f A_f, \quad \bar{A}_{\bar{f}} = \eta_f \bar{A}_f \tag{67}$$

При отсутствии CP-нарушения выражения в скобках в (66) равны и (66) описывает экспоненциальный распад. С учетом CP-нарушения и пренебрегая малым отклонением $|p/q|$ от единицы, получим временную зависимость CP-асимметрии при распаде в состояния с определенной CP-четностью:

$$\begin{aligned}
a_{CP}(t) &\equiv \frac{P_{\bar{B}^0 \rightarrow f} - P_{B^0 \rightarrow f}}{P_{\bar{B}^0 \rightarrow f} + P_{B^0 \rightarrow f}} = \frac{|\lambda|^2 - 1}{|\lambda|^2 + 1} \cos(\Delta mt) + \frac{2\text{Im}\lambda}{|\lambda|^2 + 1} \sin(\Delta mt) \\
&\equiv -C_f \cos(\Delta mt) + S_f \sin(\Delta mt),
\end{aligned} \tag{68}$$

где $\lambda \equiv \frac{q\bar{A}_f}{pA_f}$, $C_f \equiv \frac{1-|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}$, $S_f \equiv \frac{2\text{Im}\lambda}{1+|\lambda|^2}$. Ненулевое значение C_f отвечает прямому CP-нарушению имеющему место тогда, когда в распад вносят вклад амплитуды с различными СКМ-фазами. Для определения CP-нарушающих параметров (углов треугольника

унитарности) в этом случае необходимо знать фазу, возникающую за счет сильного взаимодействия продуктов распада.

СР-нарушение при интерференции смешивания и распадов обуславливает ненулевое значение S_f .

Распады $\Upsilon(4S)$ резонансов, которые рождаются в e^+e^- -аннигиляции, являются источником $B\bar{B}$ -пар. Заряд лептона, образующегося в полулептонном распаде одного из B -мезонов, фиксирует флэйвор его партнера в момент распада, что делает возможным изучение СР-нарушения. Однако усредненное значение СР-асимметрии по времени распада партнера равно нулю в случае, когда C_f – ноль:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Gamma|t|} \sin(\Delta mt) dt = 0 \quad (69)$$

В экспериментах используют пучки электронов и позитронов с разными энергиями, что позволяет измерить не проинтегрированную временную зависимость вероятности распада: $\Upsilon(4S)$ движется в системе покоя ускорителя, поэтому \bar{B}^0 и B^0 двигаются с такими же скоростями, что и первоначальный $\Upsilon(4S)$. Это позволяет определить координаты точек, в которых распались B -мезоны. В случае, когда $\Upsilon(4S)$ покоится, этого сделать невозможно, т.к. B -мезоны не успевают отлететь от точки рождения на измеримое расстояние.

5.2 $B_d^0(\bar{B}_d^0) \rightarrow J/\psi K_{S(L)}$, $\sin 2\beta$ – прямые линии

Теперь мы непосредственно переходим к определению углов треугольника унитарности. Обе мезонные фабрики используют $B_d^0(\bar{B}_d^0) \rightarrow J/\psi K_{S(L)}$ -распад для исследования СР нарушения. Древесная диаграмма, ответственная за этот распад, представлена на рис. 10а). Произведение соответствующих СКМ элементов $V_{cb}^* V_{cs} \simeq A\lambda^2$. Пингвинная диаграмма $b \rightarrow sg$ с последующим распадом глюона $g \rightarrow c\bar{c}$ также вносит вклад в амплитуду распада. Её вклад дается следующим выражением:

$$P \sim V_{us} V_{ub}^* f(m_u) + V_{cs} V_{cb}^* f(m_c) + V_{ts} V_{tb}^* f(m_t) \quad (70)$$

$$= V_{us} V_{ub}^* (f(m_u) - f(m_t)) + V_{cs} V_{cb}^* (f(m_c) - f(m_t)), \quad (71)$$

где мы воспользовались унитарностью матрицы СКМ; функции f описывают вклады кварковых петель. Последнее слагаемое во второй строчке имеет такую же слабую фазу, что и древесная амплитуда. Поэтому их удобно объединить. СКМ фактор первого слагаемого $V_{us} V_{ub}^* = A\lambda^4(\bar{\rho} - i\bar{\eta})$. Учитывая подавление за счет петли, мы получаем, что с

точностью $\sim 1\%$ $B_d^0(\bar{B}_d^0) \rightarrow J/\psi K_{S(L)}$ распад описывается древесной диаграммой. Поэтому этот распад называется “золотой модой”, т.к. точность теоретического предсказания СР-нарушения в нем высока:

$$a_{CP}(t) = \text{Im}\lambda \sin(\Delta m \Delta t), \quad (72)$$

где Δt – время между полулептонным распадом одного (тагирующего) В-мезона и распадом другого (тагируемого) В-мезона в $J/\psi K_{S(L)}$. Используя уравнение $\bar{A}_f = \eta_f \bar{A}_{\bar{f}}$, где η_f – СР-четность конечного состояния, мы получим:

$$\lambda = \left(\frac{q}{p}\right)_{B_d} \frac{A_{\bar{B}_d^0 \rightarrow J/\psi K_{S(L)}}}{A_{B_d^0 \rightarrow J/\psi K_{S(L)}}} = \left(\frac{q}{p}\right)_{B_d} \eta_f \frac{A_{\bar{B}_d^0 \rightarrow \overline{J/\psi K_{S(L)}}}}{A_{B_d^0 \rightarrow J/\psi K_{S(L)}}}. \quad (73)$$

Амплитуда в числителе содержит рождение \bar{K}^0 -мезона. Для того, чтобы спроектировать ее на $\bar{K}_{S(L)}$, воспользуемся следующим равенством:

$$\bar{K}^0 = \frac{K_S - K_L}{2(q)_K} = \frac{\bar{K}_S + \bar{K}_L}{2(q)_K}, \quad (74)$$

Амплитуда в знаменателе содержит рождение K^0 , и, используя

$$K^0 = \frac{K_S + K_L}{2(p)_K}, \quad (75)$$

мы получаем фактор $(p)_K$ в числителе. Собирая все факторы и подставляя СКМ элементы, для отношения $\bar{A}_{\bar{f}}/A_f$ окончательно получим:

$$\lambda = \eta_{S(L)} \left(\frac{q}{p}\right)_{B_d} \frac{V_{cb}V_{cs}^*}{V_{cb}^*V_{cs}} \left(\frac{p}{q}\right)_K. \quad (76)$$

Так как в $B_d(\bar{B}_d)$ -распадах J/ψ и $K_{S(L)}$ рождаются в р-волне, то $\eta_{S(L)} = -(+)$ (J/ψ и K_S имеют СР-четность $+$, а $K_L - -$). Подставляя выражение $(q/p)_{B_d}$ и $(p/q)_K$ в (73) и учтя $\eta_{S(L)}$, мы находим:

$$\lambda(J/\psi K_{S(L)}) = -(+) \frac{V_{td}V_{tb}^* V_{cb}V_{cs}^* V_{cd}^*V_{cs}}{V_{td}^*V_{tb} V_{cb}^*V_{cs} V_{cd}V_{cs}^*}, \quad (77)$$

и это выражение инвариантно относительно фазовых вращений кварковых полей. Используя тот факт, что

$$\text{arg}(V_{tb}^*V_{td}) = 2\pi - \beta, \quad (78)$$

мы окончательно получаем предсказание Стандартной Модели:

$$a_{CP}(t)|_{J/\psi K_{S(L)}} = (-) \sin 2\beta \sin(\Delta m \Delta t). \quad (79)$$

Таким образом, измерение CP-асимметрии в этих распадах позволяет определить значение угла β с теоретической неопределенностью $\sim 1\%$. Коллаборации Belle и BABAR дают согласующиеся значения β , и их среднее равно:

$$\sin 2\beta = 0.675 \pm 0.026 . \quad (80)$$

Мы получаем два возможных решения для 2β , которые находятся в первом и втором квадрантах. Наименьшее значение $\beta = (21 \pm 1)^\circ$ согласуется со следующим из длин сторон треугольника унитарности:

$$\beta = \arccos \frac{|V_{td}|^2 + V_{cb}^2 V_{cd}^2 - |V_{ub}|^2}{2V_{cb}V_{cd}|V_{td}|} = (25 \pm 3)^\circ . \quad (81)$$

Возвращаясь к формуле (77) мы видим, что амплитуды распадов и $K^0 - \bar{K}^0$ -осцилляций не содержат комплексных фаз. Поэтому единственным источником CP-нарушения в распадах $B_d^0(\bar{B}_d^0) \rightarrow J/\psi K_{S(L)}$ является фаза $B^0 - \bar{B}^0$ -смешивания:

$$\left(\frac{q}{p}\right)_{B_d} = \sqrt{\frac{M_{12}^*}{M_{12}}} = \frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{tb} V_{td}^*}, \quad (82)$$

и фаза возникает за счет V_{td} . Вот почему конечное выражение (79) содержит угол $2\beta -$ фазу V_{td}/V_{td}^* .

5.3 α и γ

Экспериментально извлечь угол α можно из CP-асимметрии в $B_d^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ -распадах. Основной вклад в эти распады дадут древесная и пингвинная диаграммы. Предполагая, что древесная диаграмма доминирует, получим:

$$\lambda = \left(\frac{q}{p}\right)_{B_d} \frac{\bar{A}}{A} = \frac{V_{td} V_{tb}^* V_{ub} V_{ud}^*}{V_{td}^* V_{tb} V_{ub}^* V_{ud}} = e^{-2i(\beta+\gamma)} \quad (83)$$

и, учитывая, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, получим:

$$\text{Im} \lambda = \sin(2\alpha) , \quad a_{CP}(t)|_{\pi^+ \pi^-} = \sin(2\alpha) \sin(\Delta m \Delta t) . \quad (84)$$

Поэтому измерение временной зависимости CP-асимметрии в $\Upsilon(4S) \rightarrow B\bar{B} \rightarrow l^\pm X \pi^+ \pi^-$ распадах позволяет определить угол α , если древесная диаграмма доминирует. Однако вклад пингвинной диаграммы также важен. С ее учетом амплитуда распада может быть записана следующим образом:

$$A(B_d^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = V_{ud} V_{ub}^* (A_T + P_u) + V_{cd} V_{cb}^* P_c + V_{td} V_{tb}^* P_t . \quad (85)$$

Используя унитарность СКМ-матрицы, получим:

$$A(B_d^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) = V_{ud}V_{ub}^*(A_T + P_u - P_c) + V_{td}V_{tb}^*(P_t - P_c) \quad (86)$$

где первое слагаемое отличается от второго СКМ фазой. Второе слагаемое имеет порядок λ^3 , так же, как и древесная диаграмма. Оно подавлено только малостью петлевой амплитуды.

Данные коллабораций Belle и BABAR по величине $S_{\pi^+\pi^-}$ согласуются; усредняя их, получим:

$$S_{\pi^+\pi^-} = -0.59 \pm 0.09 , \quad (87)$$

и, пренебрегая пингвинной диаграммой, получим:

$$\alpha = 108^\circ \pm 4^\circ \quad (88)$$

Учет пингвинной диаграммы уменьшает α примерно на 10° , приближая его к следующему из длин сторон значению:

$$\alpha = \arccos \frac{|V_{ub}|^2 + |V_{td}|^2 - V_{cb}^2 V_{cd}^2}{2|V_{ub}V_{td}|} \approx 90^\circ . \quad (89)$$

Измерению угла γ в распадах $B \rightarrow \pi\pi$ “мешают” $B_d - \bar{B}_d$ -осцилляции, приводящие к появлению фазы β в формуле (83). Для того, чтобы осцилляции стали невозможны, следует рассмотреть распады заряженных B_u -мезонов. Наилучшее определение угла γ следует из анализа $B_u \rightarrow K^+ D^0 (\bar{D}^0) \rightarrow K^+ K_{S,L} \pi^+ \pi^-$ распадов, в которых интерферируют $b \rightarrow u\bar{c}s$ и $b \rightarrow c\bar{u}s$ переходы:

$$\gamma = 60^\circ \pm 30^\circ . \quad (90)$$

Основная цель улучшения точности измерений параметров СКМ матрицы – поиск новой физики. Так как значения $|V_{ub}|$, $|V_{cb}|$ и угол γ определяются по древесным процессам, вклад новой физики в них, скорее всего, пренебрежим, и они фиксируют треугольник унитарности Стандартной Модели. Другие параметры (V_{td} , β , α) определяются петлевыми процессами, в которые новая физика может давать заметный вклад. Более точные измерения на новых детекторах (Супер Belle и LHCb), возможно, помогут обнаружить эффекты новой физики. При этом важен отбор параметров в вычислении которых из экспериментальных данных теоретические ошибки минимальны и не превышают нескольких процентов. Перспективным является набор V_{cb} , β , γ и V_{td} (последний из отношения $\Delta M_{B_s}/\Delta M_{B_d}$).

Семинар. Осцилляции нейтрино

Этот раздел посвящен осцилляциям нейтрино - одной из "горячих" тем в физике элементарных частиц. Осцилляции нейтрино - это эффект превращения нейтрино одного флэйвора в нейтрино другого флэйвора в вакууме или веществе. Мы ограничимся случаем осцилляций в вакууме.

В Стандартную Модель входят нейтрино трех флэйворов, а именно электронное, мюонное и тау-нейтрино. Однако изложение теории осцилляций нейтрино принято начинать с двухфлэйворной модели осцилляций. С одной стороны, это объясняется простотой такой модели. С другой стороны, оказывается, что в ряде практически важных случаев двухфлэйворная модель оказывается хорошим приближением для описания трехфлэйворных осцилляций.

Мы начнем с двухфлэйворной модели, затем получим общую формулу для трехфлэйворных осцилляций и рассмотрим два частных случая, в которых справедливо двухфлэйворное приближение.

Двухфлэйворные осцилляции

Рассмотрим модель, в которой существует всего два лептонных флэйвора. Такую модель легко получить, например, из Стандартной Модели, "выкинув" из нее тау-лептон и тау-нейтрино. У нас останутся четыре лептона: электрон e , мюон μ , электронное нейтрино ν_e и мюонное нейтрино ν_μ . Явление осцилляций основывается на том, что нейтрино определенного флэйвора (флэйворное состояние) не является состоянием с определенной массой, а является квантовомеханической суперпозицией N состояний с определенной массой (массовых состояний), где N - число флэйворов в модели. В случае $N = 2$

$$\begin{aligned}\nu_e &= c\nu_1 + s\nu_2 \\ \nu_\mu &= -s\nu_1 + c\nu_2,\end{aligned}\tag{91}$$

где ν_1 и ν_2 - массовые состояния нейтрино с массами m_1 и m_2 соответственно, а коэффициенты c и s - косинус и синус угла смешивания нейтрино θ :

$$c \equiv \cos \theta, \quad s \equiv \sin \theta \quad (92)$$

Базис массовых состояний нейтрино ортонормирован:

$$\begin{aligned} \langle \nu_1 | \nu_1 \rangle &= \langle \nu_2 | \nu_2 \rangle = 1 \\ \langle \nu_1 | \nu_2 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (93)$$

Равенство $c^2 + s^2 = 1$, обеспечивает также ортонормированность базиса флейворных состояний нейтрино:

$$\begin{aligned} \langle \nu_e | \nu_e \rangle &= \langle \nu_\mu | \nu_\mu \rangle = 1 \\ \langle \nu_e | \nu_\mu \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (94)$$

Рассмотрим какой-нибудь характерный процесс рождения электронного нейтрино, например, рождение на протоне через заряженный ток:

$$e + p \rightarrow n + \nu_e$$

Запишем волновую функцию родившегося (в момент времени $t = 0$) электронного нейтрино в виде

$$\Psi(x, 0) = F(x)(e^{ip_1 x} c \nu_1 + e^{ip_2 x} s \nu_2), \quad (95)$$

где

$$p_i = \sqrt{E^2 - m_i^2} \simeq E - \frac{m_i^2}{2E}, \quad i = 1, 2, \quad (96)$$

E -энергия нейтрино, $E \gg m_i$ во всех практически важных случаях, $F(x)$ - огибающая волнового пакета нейтрино в начальный момент времени. Для простоты мы рассматриваем одномерное движение. Трехмерное движение рассматривается аналогично, никаких принципиально новых черт картина осцилляций при этом не приобретает.

Огибающая $F(x)$ имеет максимум при $x = 0$, существенно отлична от нуля при $|x| \leq l/2$, где l - длина волнового пакета, а также нормирована на 1:

$$\int dx |F(x)|^2 = 1 \quad (97)$$

Конкретный вид огибающей зависит от вида волновых функций начальных частиц и от лагранжиана их взаимодействия. Важно, что фактически всегда выполняется неравенство

$$l(p_2 - p_1) \simeq l \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E} \ll 1, \quad (98)$$

поэтому выражение (95) для волновой функции нейтрино в начальный момент времени можно переписать в виде

$$\Psi(x, 0) \simeq e^{ip_1 x} F(x)(c \nu_1 + s \nu_2) = e^{ip_1 x} F(x) \nu_e. \quad (99)$$

Отсюда видно, что волновая функция (95) описывает, как и следовало, нейтрино с определенным (электронным) флэйвором. Кроме того, из (94) и (97) следует, что она нормирована на единицу.

Рассмотрим эволюцию волновой функции нейтрино во времени. Из квантовой механики известно, что такая эволюция сводится к движению волнового пакета со скоростью $v \equiv p/E$ и набеганию фазы e^{-iEt} . Применяя эти правила к волновой функции в начальный момент времени (95), получим

$$\Psi(x, t) = e^{-iEt}(F(x - v_1 t)e^{ip_1 x} c\nu_1 + F(x - v_2 t)e^{ip_2 x} s\nu_2), \quad (100)$$

где

$$v_i \equiv p_i/E \simeq 1 - \frac{m_i^2}{2E^2} \quad (101)$$

Скорости v_1, v_2 очень слабо отличаются от 1 и очень близки друг к другу. Мы будем пока считать, что $v_1 = v_2 = 1$. Справедливость такого предположения будет обсуждена ниже. Расплывание пакета отсутствует, так как он движется со световой скоростью. Преобразуем выражение (100), используя формулу (96):

$$\Psi(x, t) \simeq e^{-iEt+ip_2 x} F(x - t) \left(\exp(i \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E} x) c\nu_1 + s\nu_2 \right) \quad (102)$$

Заметим, что благодаря фактору $F(x - t)$ в момент времени t эта волновая функция заметно отлична от нуля лишь в $l/2$ -окрестности точки $x = t$.

Допустим, в момент времени $t = L$ (или, что то же самое, в окрестности точки $x = L$) мы проводим измерение флэйвора нейтрино (т.е. попросту детектируем его). Вероятность обнаружить при этом мюонное нейтрино $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ дается выражением

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = | \langle \nu_\mu | \Psi(x, L) \rangle |^2 \simeq \int dx |F(x - L)|^2 \left| \langle -s\nu_1 + c\nu_2 | \exp(i \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E} L) c\nu_1 + s\nu_2 \rangle \right|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4E}, \quad (103)$$

$$\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$$

Аналогичным образом легко получить вероятность "выживания" электронного нейтрино:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4E} \quad (104)$$

Таким образом, нейтрино, рожденное электронным, на расстоянии L от точки рождения с ненулевой вероятностью превратится в мюонное. В этом и состоит явление осцилляций. Вероятность осцилляций является периодической в пространстве функцией с периодом

$$L^{osc} \equiv \frac{4\pi E}{\Delta m^2}$$

Заметим, что при вычислении вероятности осцилляций огибающая F вошла лишь в нормировочный интеграл $\int dx |F(x - L)|^2$, который в силу условий нормировки равен 1. Соответственно в конечное выражение для вероятности огибающая F не вошла вовсе. Это означает, что мы могли бы формально с самого начала положить $F(x)$ равной 1 (равно как и любой другой удобной в вычислениях функцией), выкинув при этом нормировочный интеграл из формулы для вероятности. Этот трюк лежит в основе т.н. плосковолнового приближения, в котором нейтрино описывается плоской волной:

$$\Psi(x, t) = e^{-iEt} (e^{ip_1 x} c\nu_1 + e^{ip_2 x} s\nu_2) \quad (105)$$

При этом в силу того, что данная волновая функция есть волновая функция с определенной энергией, в точке $x = 0$ (источник нейтрино) в любой момент времени t нейтрино является электронным:

$$\Psi(0, t) = e^{-iEt} \nu_e \quad (106)$$

Вероятность обнаружить на расстоянии L от источника мюонное нейтрино в любой момент времени t определяется выражением

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = | \langle \nu_\mu | \Psi(L, t) \rangle |^2 = | \langle -s\nu_1 + c\nu_2 | e^{ip_1 L} c\nu_1 + e^{ip_2 L} s\nu_2 \rangle |^2 = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4E}, \quad (107)$$

т.е. совпадает с полученным ранее результатом.

В заключение этого раздела кратко обсудим, при каких условиях законно приближение $v_1 = v_2$. Очевидно, что указанное приближение справедливо до тех пор, пока волновые пакеты различных массовых состояний нейтрино не успели пространственно разделиться:

$$|v_2 - v_1|L \ll l$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$2\pi L/L^{osc} \ll lE$$

Это неравенство всегда выполняется для нейтрино, рожденных (и регистрируемых) на Земле. Оно может не выполняться для нейтрино, рожденных при термоядерном горении звезд или при взрыве сверхновой. Однако на осцилляции таких нейтрино всегда оказывает существенное влияние эффект вещества (MSW-эффект), который мы здесь не обсуждаем.

Трехфлэйворные осцилляции

Каждое флэйворное состояние нейтрино является суперпозицией трех массовых:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (108)$$

Обе тройки нейтринных состояний образуют ортонормированные базисы (флэйворный и массовый), поэтому матрица $U \equiv ||U_{li}||$, $l = e, \mu, \tau$, $i = 1, 2, 3$, должна быть унитарной, $U^+U = 1$. Унитарная матрица 3×3 может быть параметризована, с точностью до общего фазового множителя, 6 действительными параметрами. Наиболее употребительна следующая параметризация:

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (109)$$

$$\times \text{diag}(e^{i\alpha_1/2}, e^{i\alpha_2/2}, 1),$$

$$c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}, \quad s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij} \quad (110)$$

Здесь θ_{ij} – три угла смешивания, δ – дираковская фаза, α_1, α_2 – майорановские фазы смешивания (присутствуют, если нейтрино - майорановская частица).

Используя приближение плоских волн, легко получить формулу для вероятности перехода нейтрино флэйвора l в нейтрино флэйвора l' на расстоянии L от источника:

$$P(\nu_l \rightarrow \nu_{l'}) = |\langle \nu_{l'} | \sum_i e^{ip_i L} U_{li} \nu_i \rangle|^2 =$$

$$= \delta_{ll'} - 2\text{Re} \sum_{i < j} U_{li} U_{l'i}^* U_{lj}^* U_{l'j} \left(1 - e^{2\pi i L / L_{ji}^{osc}}\right), \quad (111)$$

где

$$L_{ji}^{osc} \equiv \frac{4\pi E}{\Delta m_{ji}^2}$$

Из этой формулы, в частности, сразу следует, что майорановские фазы не влияют на осцилляции нейтрино.

Для дальнейшего нам потребуются значения углов смешивания и разностей квадратов масс нейтрино (фазы на настоящий момент не измерены, равно как и знаки Δm_{31}^2 и Δm_{32}^2):

$$\begin{aligned}
\sin^2 2\theta_{23} &> 0.92, & 19 \cdot 10^{-4} \text{eV}^2 < |\Delta m_{31}^2| < 30 \cdot 10^{-4} \text{eV}^2 \\
\sin^2 2\theta_{21} &= 0.86, & \Delta m_{21}^2 &= 0.80 \cdot 10^{-4} \text{eV}^2 \\
\sin^2 2\theta_{13} &\leq 0.19.
\end{aligned} \tag{112}$$

Видно, что существует иерархия разностей масс и углов смешивания:

$$|\Delta m_{31}^2| \simeq |\Delta m_{32}^2| \simeq 30 \Delta m_{21}^2 \tag{113}$$

$$\sin^2 2\theta_{13} < 1/5, \quad \sin^2 2\theta_{21} \approx \sin^2 2\theta_{32} \tag{114}$$

Эта иерархия позволяет свести трехфлэйворные осцилляции к двухфлэйворным в двух важных частных случаях.

1. Осцилляции мюонных нейтрино в тау-нейтрино при L меньшем чем L_{21}^{osc} , $L < (2-3)L_{31}^{osc}$

Этот случай реализуется, например, в эксперименте К2К, в котором мюонные нейтрино с энергией ~ 1 ГэВ регистрируются в 250 км от точки рождения.

В силу (113)

$$L_{31}^{osc} \simeq L_{32}^{osc} \simeq 1/30 L_{21}^{osc},$$

поэтому выражение $(1 - e^{i2\pi L/L_{21}^{osc}})$ близко в рассматриваемом случае к нулю, и мы можем опустить член, содержащий эту скобку как сомножитель, в сумме в правой части (111). Кроме того, пренебрежем слагаемыми, пропорциональными $s_{13}^2 < 0.05$. В итоге для вероятностей осцилляций получим выражение, совпадающее с выражениями, полученными в двухфлэйворной модели(см. (103)):

$$\begin{aligned}
P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) &\simeq \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \\
P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) &\simeq 1 - P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau)
\end{aligned}$$

2. Осцилляции электронных нейтрино в случае, когда регистрируется лишь недостаток электронных нейтрино, а мюонные и тау-нейтрино не регистрируются.

Такая ситуация имеет место тогда, когда энергия нейтрино слишком мала для того, чтоб родить в детекторе мюон. В частности, это относится ко всем экспериментам, в которых источником нейтрино служат атомные реакторы или Солнце.

Вероятность $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ в этом случае дается формулой

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - 4 \sum_{i < j} |U_{ei}|^2 |U_{ej}|^2 \sin^2(\pi L/L_{ji}^{osc})$$

Пренебрегая слагаемыми, содержащими s_{13}^2 , получим формулу, совпадающую с (104):

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \quad (115)$$

Заметим, однако, что в данном случае электронное нейтрино

$$\nu_e \simeq c_{21}\nu_1 + s_{21}\nu_2$$

переходит (с вероятностью $1 - P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}$) в ортогональную суперпозицию

$$\nu_{e\mu} \simeq -s_{21}\nu_1 + c_{21}\nu_2,$$

которая не является флэйворным состоянием, а сама представляет собой суперпозицию флэйворных состояний ν_μ и ν_τ . Поэтому если бы регистрировались нейтрино всех флэйворов, то мы бы обнаружили, что электронные нейтрино осциллируют и в мюонные, и в тау-нейтрино.

Мы благодарны М.А. Васильеву, О.И. Лойко и Фонду “Династия” за организацию Школы по фундаментальным взаимодействиям. Работа М.В. была частично поддержана грантами РФФИ 05-02-17203 и НШ-5603.2006.2